



TITLE:

可飽和鉄心を持つ電気回路に発生
する非線形振動(Dissertation_全文
)

AUTHOR(S):

大嶋, 健司

CITATION:

大嶋, 健司. 可飽和鉄心を持つ電気回路に発生する非線形振動. 京都大学
, 1974, 工学博士

ISSUE DATE:

1974-09-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r2620>

RIGHT:



可飽和鉄心を持つ電気回路に発生する非線形振動

大 嶋 健 司

可飽和鉄心を持つ電気回路に発生する非線形振動

1 9 7 4

大 嶋 健 司

可飽和鉄心を持つ電気回路に発生する非線形振動

緒　　言	1
第 1 部　直列共振回路における非線形振動	
第 1 章　直列共振回路に発生する定常振動の理論的考察	
1. 1　緒　　言	5
1. 2　基礎方程式	5
1. 3　定常解の仮定	7
1. 4　定常解の一般的考察	9
(a) 第 1 次近似解	9
(b) 第 2 次近似解	11
1. 5　基本調波振動, $\frac{1}{3}$ 調波振動, および第 3 高調波振動	19
(a) 周期解	19
(b) 周期解の安定性	20
(c) 変分方程式の特性乗数	26
1. 6 $\frac{1}{2}$ 調波振動	29
(a) 周期解	30
(b) 周期解の安定性	31
1. 7 $\frac{3}{5}$ 調波振動	34
(a) 周期解	35
(b) 周期解の安定性	35
1. 8 $\frac{2}{3}$ 調波振動	38
(a) 周期解	38
(b) 周期解の安定性	39
1. 9 $\frac{3}{2}$ 調波振動	41
(a) 周期解	42
(b) 周期解の安定性	43

1.10	$\frac{5}{3}$ 調波振動	44
(a)	周期解	44
(b)	周期解の安定性	44
1.11	第2高調波振動	46
(a)	周期解	46
(b)	周期解の安定性	47
(c)	高次の近似解とその安定性	48
1.12	$\frac{5}{2}$ 調波振動	51
(a)	周期解	52
(b)	周期解の安定性	54
1.13	$\frac{7}{3}$ 調波振動	56
(a)	周期解	56
(b)	周期解の安定性	57
(c)	$\frac{8}{3}$ 調波振動	59
1.14	第5高調波振動	61
(a)	周期解	61
(b)	周期解の安定性	62

第2章 直列共振回路に発生する振動の実験的考察

2.1	緒言	64
2.2	実験回路	65
2.3	振動の発生領域と周波数成分	65
2.4	理論的考察との比較	69

第3章 外力に直流分を含む直列共振回路における定常振動の理論的考察

3.1	緒言	74
3.2	基礎方程式	74
3.3	定常解の仮定	75
3.4	基本調波振動	78
(a)	周期解	78
(b)	周期解の安定性	79

3. 5	$\frac{1}{2}$ 調波振動	81
(a)	周期解とその安定性	81
(b)	$\frac{1}{4}$ 調波振動および $\frac{3}{4}$ 調波振動	84
3. 6	第2高調波振動	86
(a)	外力の振幅が大きくない場合の近似解	86
(b)	第3高調波成分をも考慮した近似解	87
3. 7	$\frac{3}{2}$ 調波振動	90
(a)	周期解	90
(b)	周期解の安定性	92
3. 8	$\frac{5}{2}$ 調波振動	95
(a)	周期解とその安定性	95
(b)	$\frac{1}{4}$ 調波振動	98

第 4 章 鉄心中の磁束を直流偏極した直列共振回路に発生する振動の実験的考察

4. 1	緒 言	100
4. 2	実験回路	100
4. 3	理論的考察との比較	101

第 2 部 変圧器結合回路における非線形振動

第 5 章	変圧器結合回路に発生する定常振動の理論的考察	111
5. 1	緒 言	111
5. 2	基礎方程式	112
5. 3	定常解の仮定	113
5. 4	主要成分の周波数 ν が1より小さい場合の定常解の考察	115
(a)	周期解	118
(b)	概周期解	121
5. 5	定常解の安定性 ($\nu < 1$ の場合)	122
(a)	周期解の安定性	122
(b)	定数係数を持つ変分方程式の誘導	125
(c)	概周期解の安定性	128

5. 6	概周期振動の位相空間解析 ($\nu < 1$ の場合)	135
(a)	調波解析法による数値解析	135
(b)	変換法を用いた位相空間解析	136
5. 7	基本調波振動 ($\nu = 1$ の場合)	137
(a)	周期解	137
(b)	周期係数を持つ変分方程式による安定判別	139
(c)	定数係数を持つ変分方程式による安定判別	140
5. 8	主要成分の周波数 ν が 1 より大きい場合の定常解の考察	144
(a)	周期解	147
(b)	概周期解	148
5. 9	定常解の安定性 ($\nu > 1$ の場合)	152
(a)	周期解の安定性	152
(b)	概周期解の安定性	154
5.10	概周期振動の位相空間解析 ($\nu > 1$ の場合)	159
(a)	概周期振動に対応するリミットサイクル	160
(b)	変換法を用いた位相空間解析	162
第 6 章	変圧器結合回路に発生する定常振動の実験的考察	
6. 1	緒 言	164
6. 2	実験回路	164
6. 3	振動発生領域と周波数特性	165
6. 4	理論的考察との比較	167
結 言		177
謝 辞		179
付 録 I	Hill の方程式の係数	180
付 録 II	実験に用いたリアクトル	191
付 録 III	SCR を用いた開閉器	193
付 録 IV	ヘテロダイン波形分析器	196
付 録 V	周期係数線形微分方程式を定数係数線形微分方程式に変換する方法	200
参考文献		202

一般に物理系における非線形振動を解析するとき、まずその振動を非線形微分方程式で記述する。非線形振動を取り扱う場合、基本的な微分方程式を深く研究することは、他の多くの物理系に発生する振動を解析するのに役立つものと考えられる。そこでこの論文では可飽和鉄心を持つ比較的簡単な電気回路に発生する振動について考察する。第1部では直列共振回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する振動について考察する。^[1, 2]この系の強制振動を記述する方程式はいわゆる Duffing の方程式

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k \frac{dv}{d\tau} + f(v) = B \cos \tau \quad (1)$$

となり、 $f(v)$ は非線形復原力を表わす。この方程式の解は外力と同じ周波数成分を顕著に持つ基本調波解以外に、外力周波数と整数比 (m/n) をなす周波数成分を持つ m/n 調波解となることがある。これらの周期解は外力に同期化するが、外力に同期化することが困難な解もある。第2部では変圧器結合回路に発生する振動について考察する。この系は2つの可飽和リアクトルを持ち、1次側は直列に接続して正弦波電圧を印加し、2次側は極性を逆に接続し、容量と共振回路を形成する。この回路はパラメトリック励振回路^{*}として知られている。この変圧器結合回路における振動を記述する方程式は1階と2階の連立非線形微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} + \frac{1}{8} k_1 (a^2 + 3b^2) a &= B \sin \tau \\ \frac{db}{d\tau} + k_2 \frac{db}{d\tau} + \frac{1}{8} (3a^2 + b^2) b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となり、この方程式の解は外力に同期化した周期解以外に外力に同期化しない概周期解となることがある。^[3]

直列共振回路に発生する周期振動、および変圧器結合回路に発生する周期振動と概周期振動について理論的ならびに実験的に考察する。一般に非線形回路に周期的外力を加えると、外力周波数と整数比をなす周波数成分を持つ同期化した周期振動を発生する 경우가多いが、外力に同

* パラメトリック励振の原理はディジタル計算機の論理回路の設計に応用されている。

同期化しない概周期振動を発生する場合もある。この論文では調波解析法を用いて定常解を求める。調波解析法を用いる場合には、まず定常解の主要周波数成分の選び方が問題となる。解に含まれる主要な周波数成分を決定する方法を考察し、周期解および概周期解の一般的考察を行なう。高次の近似解を仮定して計算すれば、同期化した周期振動および同期化しない概周期振動をともに解析することができる。

非線形系における振動の研究にはその安定性が重要問題となる。Duffing 方程式の周期解の安定性を林千博教授の方法^[1,2]に従って考察する。これによると、周期解を不安定にする不安定振動の周波数成分が判ると共に、新しく励起する周期解を予知することができる。またさらに 1 階と 2 階の連立非線形微分方程式 (2) における周期解および概周期解の安定性を考察する。

理論的考察において、厳密には数学的な取り扱いをしていない部分があるが、常に実験を行なって解析結果と実験結果を比較検討する。

第 1 部 直列共振回路における非線形振動

第1章 直列共振回路に発生する定常振動の理論的考察

1.1 緒 言

可飽和鉄心を持つ直列共振回路に正弦波電圧を加えると、外力と同じ周波数成分を顕著に持つ基本調波振動を発生する場合もあるが、可飽和鉄心の非線形特性により外力周波数以外の周波数成分を主要成分とするような振動を発生する場合もある。これらの振動は外力に同期化して外力周波数と整数比 (m/n) をなす周波数成分を持つ周期振動となることが多いが、回路に損失のない場合には、外力に同期化しないで外力周波数と無理数比をなす周波数成分を持つ概周期振動となることもある。^[2, p. 192] これらの振動の主要周波数成分は外力周波数を1とすれば、これと共振回路の固有周波数に近い周波数 ν の成分であると考えられる。共振回路の固有周波数は静電容量の大きさとリアクトルの等価的インダクタンスによって決まり、等価的インダクタンスは振動磁束の振幅に依存する。また可飽和鉄心の非線形特性によりこれらの振動には外力周波数1および周波数 ν 以外の周波数成分も存在する。

ここでは、これらの定常解を調波解析法を用いて求める。調波解析法を用いる場合には、まず定常解の主要周波数成分の選び方が問題となる。解に含まれる主要成分の周波数を選ぶ方法として、系のパラメタのうち小さいものを無視して、外力周波数1および周波数 ν の成分を持つ第1次近似解を仮定し、その後繰返し法によって解の近似を高めることにより、主要成分の周波数を定める方法を考察する。

1.2 基礎方程式

図 1.1 に示すように可飽和鉄心を持つ直列共振回路に交番電圧 $E \sin \omega t$ を印加した場合を考える。図に示した記号を用いると次の回路方程式を得る。

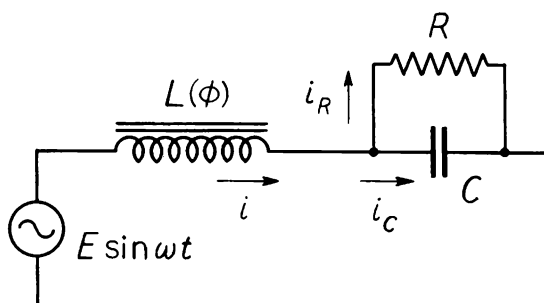


図 1.1 振 動 回 路。

$$\left. \begin{aligned} n \frac{d\phi}{dt} + R i_R &= E \sin \omega t \\ R i_R &= \frac{1}{C} \int i_C dt \\ i &= i_R + i_C \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ここに n はコイルの巻数であり、 ϕ は鉄心中の磁束である。鉄心の磁化特性を次のように仮定する。*

$$n i = a \phi^3 \quad (1.2)$$

ここに a は鉄心の磁化特性による定数である。電流、磁束、および容量を無次元化するために

$$i = I_n u, \quad \phi = \Phi_n v, \quad C = C_n m \quad (1.3)$$

によって定義される u, v , および m を導入する。ここに I_n, Φ_n , および C_n はそれぞれ電流、磁束、および容量の単位量であり、任意に選ぶことができるが計算を簡単にするために

$$n \omega^2 C_n \Phi_n = I_n, \quad a \Phi_n^3 = n I_n \quad (1.4)$$

なる関係を設ける。式 (1.2) は式 (1.3) および式 (1.4) を用いると、

$$u = v^3 \quad (1.5)$$

となる。式 (1.3), 式 (1.4), および式 (1.5) を用いて式 (1.1) を書き直せば、 v について次の基礎方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{m} v^3 &= B \sqrt{1 + (k/m)^2} \cos \tau \\ \tau &= \omega t - \tan^{-1} \frac{k}{m}, \quad k = \frac{1}{\omega C_n R} \\ B &= \frac{E}{n \omega \Phi_n} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

* 実際には鉄心の磁化特性は $n i = a_1 \phi + a_3 \phi^3 + \dots + a_n \phi^n$ で表わされ、 n が 5 以上の高次の項 $a_n \phi^n$ を持つが、計算の簡単のため磁化特性を式 (1.2) のように 3 次特性と仮定した。実験では解析結果と比較するため 3 次特性のリアクトルを合成した。(第 2.2 節)

1.3 定常解の仮定^{[5]~[8]}

式(1.6)の定常解を求めるために調波解析法を用いる。調波解析法を用いる場合にはまず定常解の主要周波数成分の選び方が問題となる。この節では解に含まれる主要な周波数成分について考察する。

まず、 $k=0$ および $B=0$ の場合、式(1.6)は

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{v^2}{m} v = 0 \quad (1.7)$$

となる。共振回路の固有周波数を ν_0 とすると、 ν_0^2 は上式より v^2/m の平均値にほぼ等しいと考えられ、 v の第1次近似として次式を仮定する。

$$v = A_{\nu_0} \sin(\nu_0 \tau + \alpha_{\nu_0}) \quad (1.8)$$

式(1.8)を式(1.7)に代入して調波解析を行なうと、振幅 A_{ν_0} と固有周波数 ν_0 の関係を与える次式を得る。

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{3}{4m}} A_{\nu_0} \quad (1.9)$$

つぎに、 k が比較的小さく B が零でない場合には、解の主要周波数成分は外力周波数を1とすれば、これと固有周波数に近い周波数 ν^* の成分であると考え、第1次近似として次式を仮定する。

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu \tau + \alpha_\nu) \quad (1.10)$$

ここで式(1.6)を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\tau^2} &= B_m \cos \tau - \frac{k}{m} \frac{dv}{d\tau} - \frac{1}{m} v^3 \\ B_m &= B \sqrt{1 + (k/m)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

* 固有周波数 ν_0 が外力周波数1と整数比(m/n)をなす周波数に近い場合、振動が外力に同期化し、周波数 m/n の主要成分を持つ周期振動となることが多い。例えば固有周波数 ν_0 が0.3であっても、振動が外力に引込まれて主要成分の周波数 ν が $1/3$ となることがある。なお、 $k=0$ における外力に同期化しない概周期振動の主要成分の周波数 ν は固有周波数にほぼ等しいと考えられ、一般には外力周波数と無理数比をなす。^[2, p. 192]

となる。式 (1.10) を式 (1.11) の右辺に代入し、両辺を積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 v = & -B_m \cos \tau + \frac{k}{m} \left\{ A_1 \cos (\tau + \alpha_1) + \frac{1}{\nu} A_\nu \cos (\nu \tau + \alpha_\nu) \right\} \\
 & + \frac{1}{m} \left[\left(\frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_\nu^2 \right) A_1 \sin (\tau + \alpha_1) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{3}{4} A_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 \right) A_\nu \sin (\nu \tau + \alpha_\nu) \\
 & \quad - \frac{3}{4(1-2\nu)^2} A_1 A_\nu^2 \sin \{ (1-2\nu) \tau + \alpha_1 - 2\alpha_\nu \} \\
 & \quad - \frac{3}{4(1+2\nu)^2} A_1 A_\nu^2 \sin \{ (1+2\nu) \tau + \alpha_1 + 2\alpha_\nu \} \\
 & \quad + \frac{3}{4(2-\nu)^2} A_1^2 A_\nu \sin \{ (2-\nu) \tau + 2\alpha_1 - \alpha_\nu \} \\
 & \quad - \frac{3}{4(2+\nu)^2} A_1^2 A_\nu \sin \{ (2+\nu) \tau + 2\alpha_1 + \alpha_\nu \} \\
 & \quad - \frac{1}{36} A_1^3 \sin (3\tau + 3\alpha_1) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{36\nu^2} A_\nu^3 \sin (3\nu\tau + 3\alpha_\nu) \right] \\
 & + A_0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

ここに A_0 は積分定数である。式 (1.12) より v の周波数 1 および ν 以外の周波数成分を得る。これらの成分の内、振幅の比較的大きな周波数成分を考慮して v の第 2 次近似式を次のように仮定する。*

$$\begin{aligned}
 \nu \leq 1 : \quad v = & A_1 \sin (\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin (\nu \tau + \alpha_\nu) \\
 & + A_{1-2\nu} \sin [(1-2\nu) \tau + \alpha_{1-2\nu}]
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
 \nu \geq 1 : \quad v = & A_1 \sin (\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin (\nu \tau + \alpha_\nu) \\
 & + A_{2-\nu} \sin [(2-\nu) \tau + \alpha_{2-\nu}]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

* 実験結果によれば、式 (1.13)、式 (1.14)、あるいは式 (1.15) の周波数成分が他の周波数成分に比較して優勢であることが観察された。

外力の振幅 B が大なる場合には振幅 A_1 も増大し、式 (1.12) より第 3 高調波成分も顕著に現われることを考慮して次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \nu > 1 : \quad v &= A_1 \sin (\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin (\nu \tau + \alpha_\nu) \\ &\quad + A_{2-\nu} \sin [(2-\nu) \tau + \alpha_{2-\nu}] + A_3 \sin (3 \tau + \alpha_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

なお外力の振幅 B が大きい場合には振動の振幅が増大するので、周波数 ν も大きくなると考えられる。

1.4 定常解の一般的考察 ^[7, 10]

(a) 第 1 次近似解 (1.10)

近似解 (1.10) によって解析することができる定常解について考察する。調波解析法により定常解 (1.10) の周波数 ν ，振幅 A_1, A_ν ，位相角 α_1 ，および α_ν を決定するために、式 (1.10) を式 (1.6) に代入して、周波数 1 および ν に等しくなる周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置く。式 (1.10) を式 (1.6) に代入して得られる式には表 1.1 に示す周波数が含まれる。これらの関係を考慮して上の調波解析を行えば次式を得る。

表 1.1 式 (1.10) を式 (1.6) に代入して得られる周波数

主要成分の 周波数 ν	$\nu = \frac{1}{3}$	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu \neq \frac{1}{3}, \nu \neq 1$ $\nu \neq 3$
1 に等しくなる 周波数	1, 3ν	1, $2 \nu - 1$ $\nu, 2 - \nu$	1, $\nu - 2$	1
ν に等しくなる 周波数	$\nu, 1 - 2 \nu$	1 に等しくなる	$\nu, 3$	ν

(1) ν が $\frac{1}{3}$ のとき

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \frac{1}{4m} A_\nu^3 \cos \varphi &= 0, & Y_1 - \frac{1}{4m} A_\nu^3 \sin \varphi &= 0 \\ X_\nu - \frac{3}{4m} A_1 A_\nu \cos \varphi &= 0, & Y_\nu - \frac{3}{4m} A_1 A_\nu \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

ここに

$$\varphi = \alpha_1 - 3\alpha_\nu$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{m} P_1 A_1 - B_m \sin \alpha_1, & Y_1 &= \frac{k}{m} A_1 - B_m \cos \alpha_1 \\ X_\nu &= \frac{1}{m} P_\nu A_\nu, & Y_\nu &= \frac{k}{m} \nu A_\nu \\ P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_\nu^2 - m, & P_\nu &= \frac{3}{4} A_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 - \nu^2 m \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

(2) ν が 1 のとき

この場合式 (1.10) は

$$\nu = A_1 \sin (\tau + \alpha_1) \quad (1.18)$$

となる。式 (1.18) を式 (1.6) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\left(-1 + \frac{3}{4m} A_1^2\right) A_1 = B_m \sin \alpha_1, \quad \frac{k}{m} A_1 = B_m \cos \alpha_1 \quad (1.19)$$

(3) ν が 3 のとき

式 (1.10) を式 (1.6) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \frac{3}{4m} A_1^2 A_\nu \cos \varphi &= 0, & Y_1 - \frac{3}{4m} A_1^2 A_\nu \sin \varphi &= 0 \\ X_\nu - \frac{1}{4m} A_1^3 \cos \varphi &= 0, & Y_\nu - \frac{1}{4m} A_1^3 \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

ここに

$$\varphi = 3\alpha_1 - \alpha_\nu$$

ただし式 (1.17) の記号を用いた。

(4) ν が $\frac{1}{3}$, 1, および 3 以外のとき

式 (1.10) を式 (1.6) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad X_\nu = 0, \quad Y_\nu = 0 \quad (1.21)$$

ただし 式 (1.17) の記号を用いた。

周波数 ν が $\frac{1}{3}$, 1, あるいは 3 の場合, それぞれ式 (1.16), 式 (1.19), あるいは式 (1.20) において, パラメタ B , k , あるいは m を適当に与えると, 振幅 A_1 , A_ν , 位相角 α_1 , および α_ν がすべて求まる。周波数 ν が一定の値に対し, 式 (1.6) の解がパラメタ B , k , および m

のある範囲内で求まるので、その範囲内で解 (1.10) が外力に同期化する領域のあることが判る。

周波数 ν が $\frac{1}{3}$, 1, および 3 以外の場合には、式 (1.21) の第 4 式 $Y_\nu = 0$ より次式を得る。

$$k A_\nu = 0 \tag{1.22}$$

まず、パラメタ k が零でない場合には、振幅 A_ν は零である。式 (1.10) の程度の近似では ν が $\frac{1}{3}$, 1, および 3 以外の解は表わされないのので、後の第 1.4 (b) 節で高次の近似解を求めて解析する。つぎに、パラメタ k が零の場合には、式 (1.21) より、パラメタ B, m , および振幅 A_ν を適当に与えると、振幅 A_1 , 位相角 α_1 , および周波数 ν が定まる。しかし、位相角 α_ν は定まらない。またパラメタ B あるいは m を変えると周波数 ν もそれにつれて連続的に変化するので、解 (1.10) が外力に同期化する領域のないことが判る。

表 1.1 に示したように周波数 ν の値如何によっては 3ν , $1-2\nu$ 等見掛上では 1 または ν と異なる周波数も 1 または ν に等しくなる。実験結果によれば、 3ν , $1-2\nu$ 等が 1 または ν に等しくなるような周波数 ν を持つ解 (1.10) は外力に同期化する領域のあることが判った。なお数値例は第 1.5 節に示す。

(b) 第 2 次近似解 (1.13) あるいは (1.14)

第 2 次近似解 (1.13) あるいは (1.14) によって解析することができる定常解について考察する。周波数 ν が 1 より小さい場合の定常解 (1.13) の周波数 ν , 振幅 $A_1, A_\nu, A_{1-2\nu}$, 位相角 α_1, α_ν , および $\alpha_{1-2\nu}$ を決定するために、式 (1.13) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, ν , および $1-2\nu$ に等しくなる周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置く。式 (1.13) を式 (1.6) に代入して得られる式には表 1.2 に示す周波数の成分が含まれる。

表 1.2 式 (1.13) を式 (1.6) に代入して得られる周波数

主 要 成 分 の 周 波 数 ν	$\nu = \frac{1}{3}$	$\nu = \frac{1}{2}$	$\nu = \frac{3}{5}$	$\nu = \frac{2}{3}$	$\nu \neq \frac{1}{3}, \nu \neq \frac{1}{2}$ $\nu \neq \frac{3}{5}, \nu \neq \frac{2}{3}$
1 に等しくなる 周 波 数	1, 3ν $2-3\nu$ $3-6\nu$	1 $4\nu-1$	1 $5\nu-2$	1 $3-6\nu$	1
ν に等しくなる 周 波 数	ν , $1-2\nu$ $4\nu-1$ $2-5\nu$	ν $2-3\nu$ $5\nu-2$	ν $3-4\nu$ $6\nu-3$	ν	ν
$1-2\nu$ に等しくなる 周 波 数	ν に等しくなる	$1-2\nu$ $3-6\nu$	$1-2\nu$ $2-3\nu$	$1-2\nu$ $3-4\nu$	$1-2\nu$

表 1.2 に示したように、周波数 ν が $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, および $\frac{5}{3}$ のとき、 $2-3\nu$, $4\nu-1$ 等見掛上では 1, ν , または $1-2\nu$ と異なる周波数も 1, ν , または $1-2\nu$ に等しくなる。

周波数 ν が 1 より大きい場合の定常解 (1.14) の周波数 ν , 振幅 $A_1, A_\nu, A_{2-\nu}$, 位相角 α_1, α_ν , および $\alpha_{2-\nu}$ を決定するために、式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, ν , および $2-\nu$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置く。式 (1.14) を式 (1.6) に代入して得られる式には表 1.3 に示す周波数の成分が含まれる。表 1.3 に示したように、周波数 ν が 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $2, \frac{7}{3}, 3$, および 5 のとき、 $3-2\nu$, $6-3\nu$ 等見掛上では 1, ν , または $2-\nu$ と異なる周波数も 1, ν , または $2-\nu$ に等しくなる。これらの関係を考慮して上の調波解析を行なう。

まず周波数 ν が 1 より小さい場合の定常解 (1.13) について考察する。

(1) ν が $\frac{1}{3}$ のとき

ν が $\frac{1}{3}$ の場合の定常解については既に第 1.4(a) 節で考察した。

(2) ν が $\frac{1}{2}$ のとき

式 (1.13) を式 (1.6) に代入し、周波数 1 および $\frac{1}{2}$ の周波数成分を含む三角関数 sine およ

表 1.3 式 (1.14) を式 (1.6) に代入して得られる周波数

主 要 成 分 の 周 波 数 ν	$\nu = 1$	$\nu = \frac{3}{2}$	$\nu = \frac{5}{3}$	$\nu = 2$	$\nu = \frac{7}{3}$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu \neq 1, \nu \neq \frac{3}{2}$ $\nu \neq \frac{5}{3}, \nu \neq 2$ $\nu \neq \frac{7}{3}, \nu \neq 3$ $\nu \neq 5$
1 に 等 し く な る 周 波 数	$1, \nu, 2-\nu$ $2\nu-1$ $3-2\nu$ $4-3\nu$	1	1 $3\nu-4$ $6-3\nu$	1 $5-2\nu$ $2\nu-3$	1 $3\nu-6$	1 $\nu-2$ $2\nu-5$ $4-\nu$	1 $\nu-4$	1
ν に 等 し く な る 周 波 数	1 に 等 し く な る	ν $6-3\nu$	ν $5-2\nu$	ν $4-\nu$ $3\nu-4$	ν	ν $2\nu-3$ 3 $3\nu-6$	ν $2\nu-5$	ν
$2-\nu$ に 等 し く な る 周 波 数	1 に 等 し く な る	$2-\nu$ $3\nu-4$	$2-\nu$ $5\nu-3$	$2-\nu$ $6-3\nu$	$\nu-2$ $5-2\nu$	1 に 等 し く な る	$\nu-2$ 3	$2-\nu$

び cosine の係数と直流成分をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 - \frac{3}{8m} A_\nu^2 A_{1-2\nu} \sin \varphi_1 &= 0 \\
 Y_1 + \frac{3}{8m} \frac{1}{A_1} (A_\nu^2 A_{1-2\nu} \cos \varphi_1 - 2 A_1 A_{1-2\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\
 X_\nu + \frac{3}{4m} A_1 A_\nu A_{1-2\nu} \sin \varphi_1 &= 0 \\
 Y_\nu + \frac{3}{4m} (A_1 A_{1-2\nu} \cos \varphi_1 - A_{1-2\nu}^2 \cos \varphi_2) &= 0 \\
 Y_{1-2\nu} - \frac{1}{8m} A_{1-2\nu}^2 \cos \varphi_2 &= 0 \\
 \varphi_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_\nu - \alpha_{1-2\nu}, \quad \varphi_2 = 2\alpha_{1-2\nu} &= \pi
 \end{aligned} \right\} (1.23)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{1}{2m} \left(k A_1 - \frac{3}{4} A_\nu^2 A_{1-2\nu} \sin \alpha \right) + \frac{1}{2} B_m \cos \alpha_1 \\
 Y_1 &= \frac{1}{2m} \left(P_1 - \frac{3}{4} \frac{1}{A_1} A_\nu^2 A_{1-2\nu} \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} B_m \frac{1}{A_1} \sin \alpha_1 \\
 X_\nu &= -\frac{1}{2m} \left(k_\nu A_\nu - \frac{3}{2} A_1 A_\nu A_{1-2\nu} \sin \alpha \right) \\
 Y_\nu &= \frac{1}{2m} \left(P_\nu - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} \cos \alpha \right) \\
 X_{1-2\nu} &= -\frac{1}{2m} \left[k(1-2\nu) A_{1-2\nu} + \frac{3}{4} A_1 A_\nu^2 \sin \alpha \right] \\
 Y_{1-2\nu} &= \frac{1}{2m} \left(P_{1-2\nu} - \frac{3}{4} \frac{1}{A_{1-2\nu}} A_1 A_\nu^2 \cos \alpha \right) \\
 P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_\nu^2 + A_{1-2\nu}^2) - m, \quad P_\nu = \frac{3}{4} A_\nu^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1-2\nu}^2) - \nu^2 m \\
 P_{1-2\nu} &= \frac{3}{4} A_{1-2\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_\nu^2) - (1-2\nu)^2 m, \quad \alpha = \alpha_1 - 2\alpha_\nu - \alpha_{1-2\nu}
 \end{aligned} \right\} (1.24)$$

(3) ν が $\frac{3}{5}$ のとき

式 (1.13) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, $\frac{3}{5}$, および $\frac{2}{5}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
X_1 + \frac{3}{8m} A_\nu A_{1-2\nu}^2 \sin \varphi &= 0 \\
Y_1 - \frac{3}{8m} \frac{1}{A_1} A_\nu A_{1-2\nu}^2 \cos \varphi &= 0 \\
X_\nu - \frac{1}{8m} A_{1-2\nu}^2 (3 A_1 \sin \varphi_1 + A_{1-2\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\
Y_\nu - \frac{1}{8m} \frac{1}{A_\nu} A_{1-2\nu}^2 (3 A_1 \cos \varphi_1 - A_{1-2\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\
X_{1-2\nu} + \frac{3}{8m} A_\nu A_{1-2\nu} (2 A_1 \sin \varphi_1 - A_{1-2\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\
Y_{1-2\nu} - \frac{3}{8m} A_\nu (2 A_1 \cos \varphi_1 - A_{1-2\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\
\varphi_1 = -\alpha_1 + \alpha_\nu - 2\alpha_{1-2\nu}, \quad \varphi_2 = -\alpha_\nu - 3\alpha_{1-2\nu}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.25)$$

ここに

ただし式 (1.24) の記号を用いた。

(4) ν が $\frac{2}{3}$ のとき

式 (1.13) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, $\frac{2}{3}$, および $\frac{1}{3}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
X_1 - \frac{1}{8m} A_{1-2\nu}^3 \sin \varphi &= 0 \\
Y_1 + \frac{1}{8m} \frac{1}{A_1} A_{1-2\nu}^3 \cos \varphi &= 0 \\
X_\nu &= 0 \\
Y_\nu &= 0 \\
X_{1-2\nu} - \frac{3}{8m} A_1 A_{1-2\nu}^2 \sin \varphi &= 0 \\
Y_{1-2\nu} + \frac{3}{8m} A_1 A_{1-2\nu} \sin \varphi &= 0 \\
\varphi = -\alpha_1 - 3\alpha_{1-2\nu}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.26)$$

ここに

ただし 式 (1.24) の記号を用いた。

(5) ν が $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, および $\frac{2}{3}$ 以外のとき

式 (1.13) を式 (1.6) に代入し, 周波数 1, ν , および $1-2\nu$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= 0, & X_\nu &= 0, & Y_\nu &= 0 \\ X_{1-2\nu} &= 0, & Y_{1-2\nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

ただし 式 (1.24) の記号を用いた。

周波数 ν が $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, あるいは $\frac{2}{3}$ のとき, それぞれ式 (1.23), 式 (1.25), あるいは式 (1.26) より各振幅および位相角が求まる。^{*} 周波数 ν が一定の値に対し, 式 (1.6) の解 (1.13) がパラメタ B, k , および m のある範囲で求まるので, その範囲内で解 (1.13) が外力に同期化する領域のあることが判る。周波数 ν が $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, および $\frac{2}{3}$ 以外のときには, 式 (1.27) において振幅 $A_1, A_\nu, A_{1-2\nu}$, 位相角 $\alpha_1, \alpha (= \alpha_1 - 2\alpha_\nu - \alpha_{1-2\nu})$, および周波数 ν が未知数であると考えられ, パラメタ B, k , および m を適当に与えると, 振幅 $A_1, A_\nu, A_{1-2\nu}$, 位相角 α_1, α , および周波数 ν は定まる。しかし, 位相角 α_ν , あるいは $\alpha_{1-2\nu}$ は定まらない。

つぎに周波数 ν が 1 より大きい場合の定常解 (1.14) について考察する。

(6) ν が $\frac{3}{2}$ のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し, 周波数 1, $\frac{3}{2}$, および $\frac{1}{2}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0 \\ Y_1 &= 0 \\ X_\nu + \frac{1}{8m} A_{2-\nu}^3 \sin \varphi &= 0 \\ Y_\nu + \frac{1}{8m} \frac{1}{A_\nu} A_{2-\nu}^3 \cos \varphi &= 0 \\ X_{2-\nu} - \frac{3}{8m} A_\nu A_{2-\nu}^2 \sin \varphi &= 0 \\ Y_{2-\nu} - \frac{3}{8m} A_\nu A_{2-\nu}^2 \cos \varphi &= 0 \\ \varphi &= -\alpha_\nu + 3\alpha_{2-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

^{*} 計算機を用い, ニュートン・ラプソン法により各振幅および位相角を求めた。初期値は実験結果を考慮して適当に与えた。

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{1}{2m} \left(k A_1 + \frac{3}{2} A_1 A_\nu A_{2-\nu} \sin \alpha \right) + \frac{1}{2} B_m \sin \alpha_1 \\
 Y_1 &= \frac{1}{2m} \left(P_1 + \frac{3}{2} A_\nu A_{2-\nu} \cos \alpha \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{A_1} B_m \cos \alpha_1 \\
 X_\nu &= -\frac{1}{2m} \left(k \nu A_\nu - \frac{3}{4} A_1^2 A_{2-\nu} \sin \alpha \right) \\
 Y_\nu &= \frac{1}{2m} \left(P_\nu + \frac{3}{4} \frac{1}{A_\nu} A_1^2 A_{2-\nu} \cos \alpha \right) \\
 X_{2-\nu} &= -\frac{1}{2m} \left[k (2-\nu) A_{2-\nu} - \frac{3}{4} A_1^2 A_\nu \sin \alpha \right] \\
 Y_{2-\nu} &= \frac{1}{2m} \left(P_{2-\nu} + \frac{3}{4} \frac{1}{A_{2-\nu}} A_1^2 A_\nu \cos \alpha \right) \\
 P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_\nu^2 + A_{2-\nu}^2) - m, \quad P_\nu = \frac{3}{4} A_\nu^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{2-\nu}^2) - \nu^2 m \\
 P_{2-\nu} &= \frac{3}{4} A_{2-\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_\nu^2) - (2-\nu)^2 m, \quad \alpha = -2\alpha_1 + \alpha_\nu + \alpha_{2-\nu}
 \end{aligned} \right\} (1.29)$$

(7) ν が $\frac{5}{3}$ のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, $\frac{5}{3}$, および $\frac{1}{3}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 X_1 + \frac{1}{8m} A_{2-\nu}^2 (3 A_\nu \sin \varphi_1 + A_{2-\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\
 Y_1 + \frac{1}{8m} \frac{1}{A_1} A_{2-\nu}^2 (3 A_\nu \cos \varphi_1 + A_{2-\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\
 X_\nu - \frac{3}{8m} A_1 A_{2-\nu}^2 \sin \varphi_1 \\
 Y_\nu - \frac{3}{8m} \frac{1}{A_\nu} A_1 A_{2-\nu}^2 \cos \varphi_1 \\
 X_{2-\nu} + \frac{3}{8m} A_1 A_{2-\nu} (2 A_\nu \sin \varphi_1 + A_{2-\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\
 Y_{2-\nu} - \frac{3}{8m} A_1 (2 A_\nu \cos \varphi_1 + A_{2-\nu} \cos \varphi_2) &= 0
 \end{aligned} \right\} (1.30)$$

$$\varphi_1 = -\alpha_1 + \alpha_\nu - 2\alpha_{2-\nu}, \quad \varphi_2 = -\alpha_1 + 3\alpha_{2-\nu}$$

ここに

ただし 式 (1.29) の記号を用いた。

(8) ν が 2 のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1 および 2 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数と直流成分をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \frac{3}{4m} A_1 A_\nu A_{2-\nu} \sin \varphi_1 &= 0 \\ Y_1 - \frac{3}{4m} A_{2-\nu} (A_\nu \cos \varphi_1 + A_{2-\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\ X_\nu + \frac{3}{8m} A_1^2 A_{2-\nu} \sin \varphi_1 &= 0 \\ Y_\nu - \frac{3}{8m} \frac{1}{A_\nu} A_1^2 A_{2-\nu} \cos \varphi_1 &= 0 \\ Y_{2-\nu} - \frac{1}{8m} A_{2-\nu}^2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_1 &= -2\alpha_1 + \alpha_\nu, \quad \varphi_2 = 2\alpha_{2-\nu} = \pi \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

ここに

ただし 式 (1.29) の記号を用いた。

(9) ν が $\frac{2}{3}$ のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, $\frac{2}{3}$, および $\frac{1}{3}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \frac{1}{8m} A_{2-\nu}^3 \sin \varphi &= 0 \\ Y_1 + \frac{1}{8m} \frac{1}{A_1} A_{2-\nu}^3 \cos \varphi &= 0 \\ X_\nu &= 0 \\ Y_\nu &= 0 \\ X_{2-\nu} + \frac{3}{8m} A_1 A_{2-\nu}^2 \sin \varphi &= 0 \\ Y_{2-\nu} + \frac{3}{8m} A_1 A_{2-\nu} \cos \varphi &= 0 \\ \varphi &= \alpha_1 + 3\alpha_{2-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

ここに

ただし 式 (1.29) の記号を用いた。

(10) ν が 3 のとき

ν が 3 の場合の定常解については既に第 1.4 (a) 節で考察した。

(11) ν が 5 のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, 5, および 3 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \frac{3}{8m} A_{2-\nu} (A_1^2 \sin \varphi_1 + A_\nu A_{2-\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\ Y_1 + \frac{3}{8m} A_{2-\nu} (A_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{A_1} A_\nu A_{2-\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \\ X_\nu + \frac{3}{8m} A_1 A_{2-\nu}^2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ Y_\nu + \frac{3}{8m} \frac{1}{A_\nu} A_1 A_{2-\nu}^2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ X_{2-\nu} + \frac{1}{8m} A_1 (A_1^2 \sin \varphi_1 + 3 A_\nu A_{2-\nu} \sin \varphi_2) &= 0 \\ Y_{2-\nu} + \frac{1}{8m} A_1 \frac{1}{A_{2-\nu}} (A_1^2 \cos \varphi_1 + 3 A_\nu A_{2-\nu} \cos \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

ここに

$$\varphi_1 = 3\alpha_1 + \alpha_{2-\nu}, \quad \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_\nu + 2\alpha_{1-2\nu}$$

ただし 式 (1.29) の記号を用いた。

(12) ν が $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, 3$, および 5 以外のとき

式 (1.14) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, ν , および $2-\nu$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1, & \quad Y_1 = 0, & \quad X_\nu = 0, & \quad Y_\nu = 0 \\ X_{2-\nu} = 0, & \quad Y_{2-\nu} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

ただし 式 (1.29) の記号を用いた。

周波数 ν が $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}$, あるいは 5 のとき、それぞれ式 (1.28), 式 (1.30), 式 (1.31), 式 (1.32), あるいは式 (1.33) より各振幅および位相角が求まる。周波数 ν が一定の値に対し、式 (1.6) の解 (1.14) がパラメタ B, k , および m のある範囲で求まるので、その範囲内で解 (1.14) が外力に同期化する領域のあることが判る。周波数 ν が $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, 3$, および 5

以外のとき、式 (1.34) の第 3 式および第 5 式より

$$k \{ \nu A_\nu^2 + (\nu - 2) A_{2-\nu}^2 \} = 0 \quad (1.35)$$

となる。まず k が零でないとき、 $\nu > 1$ 、 $A_\nu^2 \geq A_{2-\nu}^2 \geq 0$ なる場合を考えているから振幅 A_ν および $A_{2-\nu}$ は零となる。つぎに k が零の場合には、パラメタ B , m , および振幅 A_ν を適当に与えると式 (1.34) より振幅 A_1 , $A_{2-\nu}$, 位相角 α_1 , $\varphi (= -2\alpha_1 + \alpha_\nu + \alpha_{2-\nu})$, および周波数 ν が定まる。しかし、位相角 α_ν あるいは $\alpha_{2-\nu}$ は定まらない。またパラメタ B を変えると周波数 ν もそれにつれて連続的に変化するので、解 (1.14) が外力に同期化する領域のないことが判る。

1.5 基本調波振動, $\frac{1}{3}$ 調波振動, および第 3 高調波振動^[11]

第 1.5 節以降では前節において一般的に考察した各周期解を求め、文献 [1] に従ってそれらの安定性を吟味する。

第 1.4(a) 節では式 (1.6) の第 1 次近似解 (1.10) の周波数 ν , 各振幅, および位相角を求めるために調波解析法を適用した。その結果周波数 ν が 1, $\frac{1}{3}$, および 3 の場合, 系のパラメタ B , k , および m のある範囲で周期解 (1.10) が外力に同期化する領域のあることが判った。周波数 ν が 1, $\frac{1}{3}$, あるいは 3 の場合の周期解 (1.10) はそれぞれ基本調波解, $\frac{1}{3}$ 調波解, あるいは第 3 高調波解であり, これらの周期解は文献 [1, 2] において詳しく解析されている。ここでは各周期解を求め、文献 [1, 2] に従ってそれらの安定性を吟味する。

(a) 周期解

式 (1.16), 式 (1.19), および式 (1.20) より, $\frac{1}{3}$ 調波解, 基本調波解, および第 3 高調波解の各周波数成分の振幅および位相角について次式を得る。

(1) 基本調波解

$$\left. \begin{aligned} (P^2 + k^2) A_1^2 &= B_m^2 m^2 \\ \sin \alpha_1 &= P A_1 / (B_m m), \quad \cos \alpha_1 = k A_1 / (B_m m) \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

ここに

$$P = \frac{3}{4} A_1^2 - m$$

(2) $\frac{1}{3}$ 調波解

$$\left. \begin{aligned}
& \left[\left(P_1 - \frac{1}{3} P_{1/3} \frac{A_{1/3}^2}{A_1^2} \right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{1}{9} \frac{A_{1/3}^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B_m^2 m^2 \\
& P_{1/3}^2 + \frac{1}{9} k^2 = \frac{9}{16} A_1^2 A_{1/3}^2 \\
& \sin \alpha_1 = \left(P_1 - \frac{1}{3} P_{1/3} \frac{A_{1/3}^2}{A_1^2} \right) A_1 / (B_m m) \\
& \cos \alpha_1 = \left(1 + \frac{1}{9} \frac{A_{1/3}^2}{A_1^2} \right) k A_1 / (B_m m) \\
& \sin (\alpha_1 - 3\alpha_{1/3}) = \frac{4}{3} k / (3 A_1 A_{1/3}) \\
& \cos (\alpha_1 - 3\alpha_{1/3}) = 4 P_{1/3} / (3 A_1 A_{1/3})
\end{aligned} \right\} (1.37)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_{1/3}^2 - m, \quad P_{1/3} = \frac{3}{4} A_{1/3}^2 + \frac{3}{2} A_1^2 - \frac{1}{9} m$$

(3) 第3高調波解

$$\left. \begin{aligned}
& \left[\left(P_1 - 3 P_3 \frac{A_3^2}{A_1^2} \right)^2 + k^2 \left(1 + 9 \frac{A_3^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B_m^2 m^2 \\
& (P_3^2 + 9 k^2) A_3^2 = \frac{1}{16} A_1^6 \\
& \sin \alpha_1 = \left(P_1 - 3 P_3 \frac{A_3^2}{A_1^2} \right) A_1 / (B_m m) \\
& \cos \alpha_1 = \left(1 + 9 \frac{A_3^2}{A_1^2} \right) k A_1 / (B_m m) \\
& \sin (\alpha_3 - 3\alpha_1) = -12 k A_3 / A_1^3 \\
& \cos (\alpha_3 - 3\alpha_1) = 4 P_3 A_3 / A_1^3
\end{aligned} \right\} (1.38)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_3^2 - m, \quad P_3 = \frac{3}{4} A_3^2 + \frac{3}{2} A_1^2 - 9 m$$

式(1.36), 式(1.37), および式(1.38)によつて基本調波解, $1/3$ 調波解, および第3高調波解の各振幅および位相角が決定される。

b) 周期解の安定性^[12]

文献 [1] に従って周期解 (1.10) の安定性を吟味するために、この周期解を $v_0(\tau)$ で表わし、それからの微小変分 $\xi(\tau)$ を考える。 $\xi(\tau)$ が時間の経過と共に零に収束すれば周期解は安定であり、 $\xi(\tau)$ が発散すれば周期解は不安定である。変分 $\xi(\tau)$ を

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \xi(\tau) \quad (1.39)$$

によって定義し、式 (1.39) を式 (1.6) に代入し、 $\xi(\tau)$ の 2 次以上の項を無視すると

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{m} v_0^2 \xi = 0 \quad (1.40)$$

なる変分方程式を得る。そこで

$$\xi(\tau) = e^{-\delta \tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (1.41)$$

なる変換を用いて、式 (1.40) より

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + (-\delta^2 + 3 \frac{1}{m} v_0^2) \eta = 0 \quad (1.42)$$

を得る。ここで周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められている。

(1) ν が 1 のとき

周期解 (1.10) を式 (1.42) に代入すると次のような Mathieu の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + [\theta_0 + 2\theta_1 \cos(2\tau - \varepsilon)] \eta &= 0 \\ \theta_0 &= -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2} A_1^2 \\ \theta_1^2 &= \theta_{1s}^2 + \theta_{1c}^2, & \varepsilon &= \tan^{-1} \frac{\theta_{1s}}{\theta_{1c}} \\ \theta_{1s} &= \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1, & \theta_{1c} &= -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Floquet の定理によれば式 (1.43) は

$$\eta(\tau) = e^{\mu \tau} \phi(\tau) \quad (1.44)$$

で表わされる解を持つ。ここに μ は特性指数と称する定数で θ_0 , θ_{1s} , および θ_{1c} によって決定される。 $\phi(\tau)$ は周期 π あるいは 2π の周期関数である。 θ_0, θ_1 平面上には解 (1.44) が不安定となる領域が θ_0 の増加と共に順次現われる。文献 [1] によれば, これらの不安定領域は第 1 次不安定領域, 第 2 次不安定領域, …とよばれ, 解 (1.44) における周期関数 $\phi(\tau)$ は奇数次不安定領域においては奇数次の調波成分よりなり, 偶数次不安定領域においては偶数次の調波成分よりなる。また第 n 次不安定領域においては第 n 次調波成分が他の周波数成分に較べて優勢である。式 (1.6) の解は式 (1.18) の程度の近似であるから, 第 1 次不安定領域における式 (1.43) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \sin(\tau - \sigma) \quad (1.45)$$

と仮定する。^[1] 式 (1.45) を式 (1.43) に代入し調波解析を行なうと次式を得る。

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - 1 - \theta_{1c} & \theta_{1s} - 2\mu \\ \theta_{1s} + 2\mu & \theta_0 + \mu^2 - 1 + \theta_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.46)$$

式 (1.41) および式 (1.45) より, $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。^[1] 従って第 1 次不安定領域における安定条件は次式で与えられる。

$$\Delta(\delta) > 0 \quad (1.47)$$

以上は第 1 次不安定領域における安定性を考察した。一般には第 2 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, …における安定性を吟味しなければならないが, これは θ_0 が大きい範囲で問題となる。このとき周期解 (1.18) には高調波成分が含まれなければならない。高調波解についての考察は第 1.5(3) 節あるいは第 1.9 節以降で述べる。

(2) ν が $1/3$ のとき

周期解 (1.10) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。^[13]

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^3 \theta_n \cos\left(\frac{2}{3}n\tau - \epsilon_n\right) \right] \eta = 0$$

ここに

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{1/3}^2) \\ \theta_n^2 &= \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, & \epsilon_n &= \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}} \\ \theta_{1s} &= \frac{3}{4m} [A_{1/3}^2 \sin 2\alpha_{1/3} - 2A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/3})] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_{1c} &= \frac{3}{4m} [-A_1^2 \cos 2\alpha_{1/3} + 2A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/3})] \\
 \theta_{2s} &= \frac{3}{2m} A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) \\
 \theta_{2c} &= -\frac{3}{2m} A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) \\
 \theta_{3s} &= \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1 \\
 \theta_{3c} &= -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1
 \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

式(1.6)の解は式(1.10)の程度の近似であるから第1次不安定領域および第3次不安定領域における式(1.48)の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_{1/3} \sin(\frac{1}{3}\tau - \sigma_{1/3}) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1)] \quad (1.49)$$

と仮定する。^[1] 式(1.49)を式(1.48)に代入し調波解析を行なうと次式を得る。

$$\Delta_1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - \frac{1}{9} - \theta_{1c} & \theta_{1s} - \frac{2}{3}\mu & \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{2s} - \theta_{1s} \\ \theta_{1s} + \frac{2}{3}\mu & \theta_0 + \mu^2 - \frac{1}{9} + \theta_{1c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} \\ \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_0 + \mu^2 - 1 - \theta_{3c} & \theta_{3s} - 2\mu \\ \theta_{2s} - \theta_{1s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} & \theta_{3s} + 2\mu & \theta_0 + \mu^2 - 1 + \theta_{3c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.50)$$

また第2次不安定領域における式(1.48)の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + a_{2/3} \sin(\frac{2}{3}\tau - \sigma_{2/3})] \quad (1.51)$$

と仮定する。^[1] 式(1.51)を式(1.48)に代入し調波解析を行なうと次式を得る。

$$\Delta_2(\tau) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 & \theta_{1s} & \theta_{1c} \\ 2\theta_{1s} & \theta_0 + \mu^2 - \frac{4}{9} - \theta_{2c} & \theta_{2s} - \frac{4}{3}\mu \\ 2\theta_{1c} & \theta_{2s} + \frac{4}{3}\mu & \theta_0 + \mu^2 - \frac{4}{9} + \theta_{2c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.52)$$

式 (1.41), 式 (1.49), および式 (1.51) より, $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.53)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.54)$$

(3) ν が 3 のとき

周期解 (1.10) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^3 \theta_n \cos(2n\tau - \epsilon_n) \right] \eta &= 0 \\ \theta_0 &= -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_3^2) \\ \theta_n^2 &= \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}} \\ \theta_{1s} &= \frac{3}{4m} [A_1^2 \sin 2\alpha_1 - 2A_1 A_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)] \\ \theta_{1c} &= \frac{3}{4m} [-A_1^2 \cos 2\alpha_1 + 2A_1 A_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1)] \\ \theta_{2s} &= \frac{3}{2m} A_1 A_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3) \\ \theta_{2c} &= -\frac{3}{2m} A_1 A_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3) \\ \theta_{3s} &= \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1 \\ \theta_{3c} &= -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

式 (1.55) の第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_3 \sin(3\tau - \sigma_3)] \quad (1.56)$$

と仮定する。^[1] 式 (1.56) を式 (1.55) に代入し調波解析を行なうと μ を定める次式を得る。

$$A_1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - 1 - \theta_{1c} & \theta_{1s} - 2\mu & \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{2s} - \theta_{1s} \\ \theta_{1s} + 2\mu & \theta_0 + \mu^2 - 1 + \theta_{1c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} \\ \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_0 + \mu^2 - 9 - \theta_{1c} & \theta_{3s} - 6\mu \\ \theta_{2s} - \theta_{1s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} & \theta_{3s} + 6\mu & \theta_0 + \mu^2 - 9 + \theta_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.57)$$

また第2次不安定領域における式(1.55)の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2)] \quad (1.58)$$

と仮定する。^[2] 式(1.58)を式(1.55)に代入し調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

$$A_2(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 & \theta_{1s} & \theta_{1c} \\ 2\theta_{1s} & \theta_0 + \mu^2 - 4 - \theta_{2c} & \theta_{2s} - 4\mu \\ 2\theta_{1c} & \theta_{2s} + 4\mu & \theta_0 + \mu^2 - 4 + \theta_{2c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.59)$$

式(1.41), 式(1.56), および式(1.58)より, $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って第1次不安定領域および第3次不安定領域における安定条件および第2次不安定領域における安定条件は次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.60)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.61)$$

数値例

基本調波解, $\frac{1}{3}$ 調波解, および第3高調波解の振幅特性を式(1.36), 式(1.37), および式(1.38)より求め, その結果を図1.2および図1.3に示す。系のパラメタは

$$\text{図 1.2 :} \quad k = 0.05, \quad m = 2.0 \quad (1.62)$$

$$\text{図 1.3 :} \quad k = 0.05, \quad m = 0.15 \quad (1.63)$$

である。第 1.5(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。図 1.2 の破線の部分では周期解 (1.10) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.10) は不安定となる。図 1.3 においては、基本調波成分の振幅特性における破線 ab の部分および破線 ef の部分では周期解 (1.10) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.10) が不安定となるが、破線 cd の部分では第 2 高調波成分あるいは直流成分を持つ不安定振動が励起す

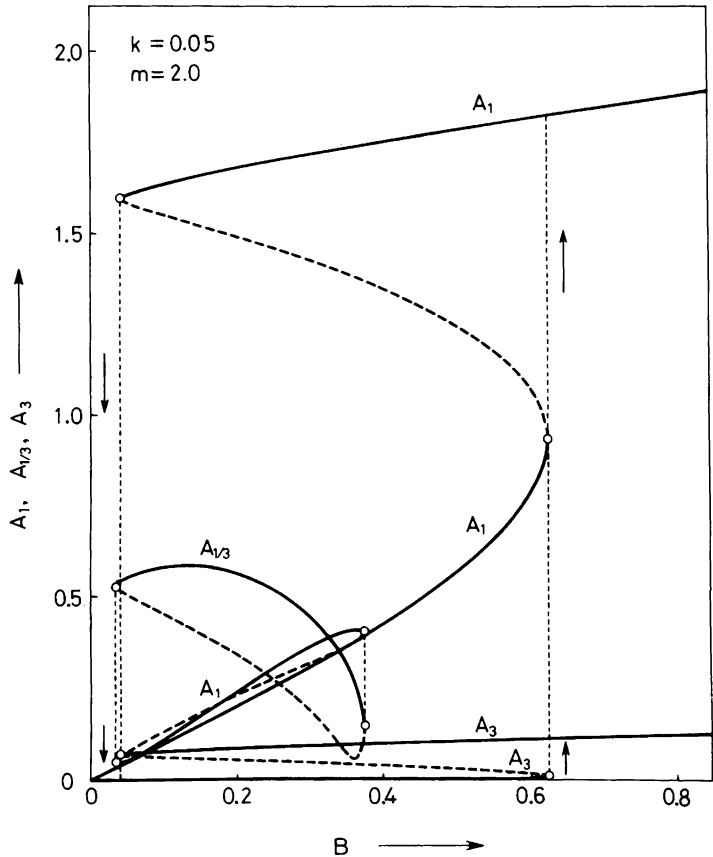


図 1.2 基本調波振動および $\frac{1}{3}$ 調波振動の振幅特性。

ることにより周期解 (1.10) が不安定となる。したがって破線 cd の部分では第 2 高調波振動が発生すると考えられる。この方法 (文献 [1]) によって安定性を考察すれば、周期解を不安定にする不安定解の周波数成分を知ることができると共に新しく励起する周期解を予知することができる。なお第 2 高調波振動については第 1.11 節で考察する。

(c) 変分方程式の特性乗数^[2]

この節では周期解 $v_0(\tau)$ の安定性を吟味するために、変分方程式 (1.40) で表わされる系の特性乗数について述べる。 $v_0(\tau)$ は周期関数であるから、式 (1.40) は周期関数を係数に持つ線形微分方程式である。ここでこの係数の周期を L とする。 $d\xi/d\tau = \eta$ とおくと、式 (1.40) はつぎの 2 元連立 1 階の線形微分方程式に書き直すことができる。

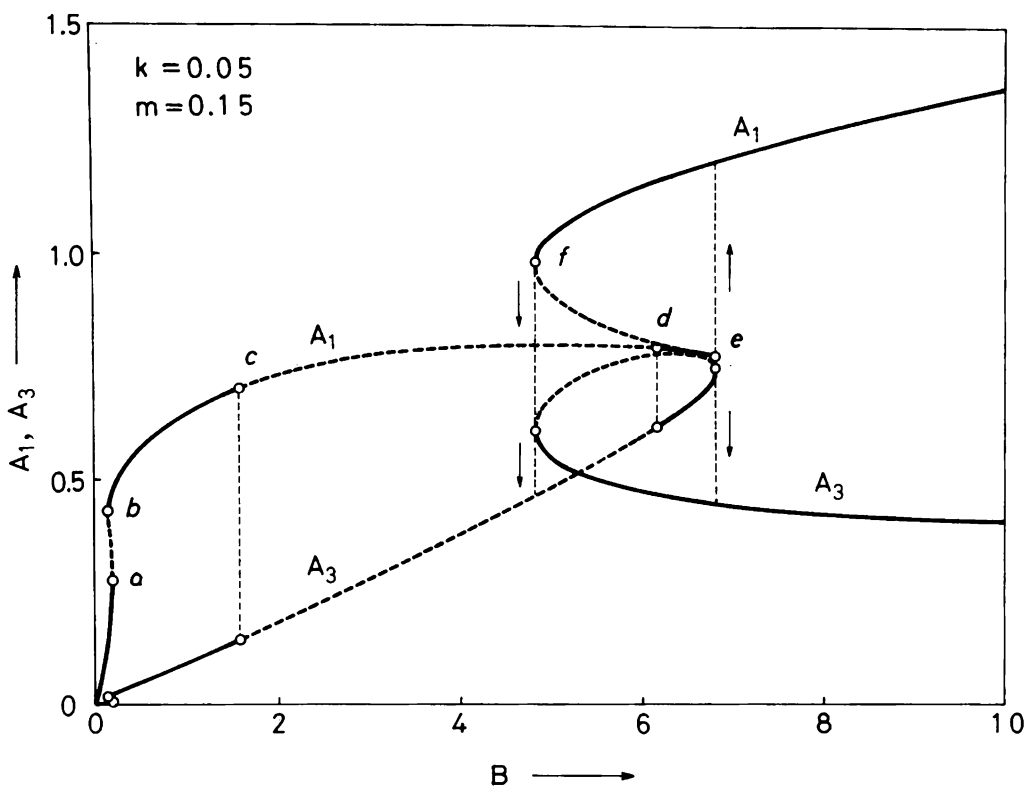


図 1.3 第 3 高調波振動の振幅特性。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{3}{m} v_0^2 \xi - \frac{k}{m} \eta \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Floquet の理論により、式 (1.64) は

$$\xi^{(i)}(\tau + L) = m_i \xi^{(i)}(\tau), \quad \eta^{(i)}(\tau + L) = m_i \eta^{(i)}(\tau) \quad (1.65)$$

なる関係を満たす 2 組の基本解を持つ。ここに m_i は特性乗数と称する定数で、式 (1.64) の特性方程式の根として得られる。^[14]

初期条件

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(0) &= 1 & \xi_2(0) &= 0 \\ \eta_1(0) &= 0 & \eta_2(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

を持つ 2 組の独立な解を $(\xi_i(\tau), \eta_i(\tau))$, $(i = 1, 2)$ とすると、式 (1.64) で表わされる系の特性

方程式は

$$\begin{vmatrix} \xi_1(L)-m & \xi_2(L) \\ \eta_1(L) & \eta_2(L)-m \end{vmatrix} = 0 \quad (1.67)$$

で与えられる。

$$m_i = e^{\mu_i L} \quad (1.68)$$

で定義される μ_i を導入すると、基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau)), (i=1,2)$ は

$$\xi^{(i)}(\tau) = e^{\mu_i \tau} \phi_1^{(i)}, \quad \eta^{(i)}(\tau) = e^{\mu_i \tau} \phi_2^{(i)} \quad (1.69)$$

と表わすことができる。^[2]ここに μ_i は特性指数であり、 $\phi_1^{(i)}$ および $\phi_2^{(i)}, (i=1,2)$ は周期 L の周期関数である。

式(1.64)の一般解は線形微分方程式の理論により互に独立な2組の基本解を用いて

$$\xi(\tau) = \sum_{i=1}^2 C_i \xi^{(i)}(\tau), \quad \eta(\tau) = \sum_{i=1}^2 C_i \eta^{(i)}(\tau) \quad (1.70)$$

と表わされる。ここに C_1 および C_2 は任意定数である。したがって特性乗数 m_1 および m_2 の絶対値が1つでも1より大きいとき、それに対応する基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau)), (i=1,2)$ は時間の経過と共に発散して不安定となり、式(1.64)の解(1.70)が不安定となる。また特性乗数 m_1 および m_2 の絶対値がすべて1より小ならば、基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau)), (i=1,2)$ は時間の経過と共に零に収束し、式(1.64)の解(1.70)も零に収束して安定である。したがって特性乗数を調べることにより周期解の安定性を吟味することができる。

数値例

第1.5(c)節の考察に従って $\frac{1}{3}$ 調波解(1.10)の安定性を吟味するために、式(1.66)の初期条件を用いて変分方程式(1.64)を1周期数値積分*することにより特性乗数 m_1 および m_2 を求めた。その結果を $\frac{1}{3}$ 調波成分の振幅 $A_{\frac{1}{3}}$ と共に図1.4および図1.5に示した。図1.4の $\frac{1}{3}$ 調波解は安定であり、図1.5の $\frac{1}{3}$ 調波解は不安定である。なお特性乗数が複素数 $\alpha \pm \beta i$ の場合には実数部 α を実線で表わし、虚数部 β を破線で表わした。図1.4では安定限界点付近の特性乗数の変化の様子が判りにくいので、外力の振幅 B の小さい部分における安定限界点の近傍を

* KDC II (京都大学計算機No.2)を使用し、RKG法により計算した。

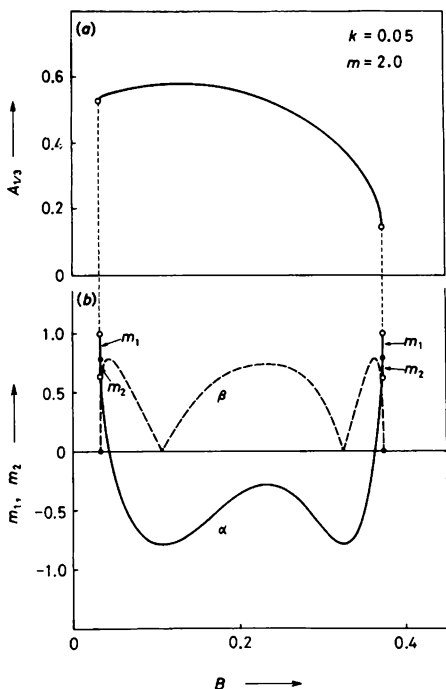


図 1.4 $\frac{1}{3}$ 調波解 (1.10) の安定性。
(a) $\frac{1}{3}$ 調波成分の振幅特性。
(b) 変分方程式 (1.64) の特性乗数。

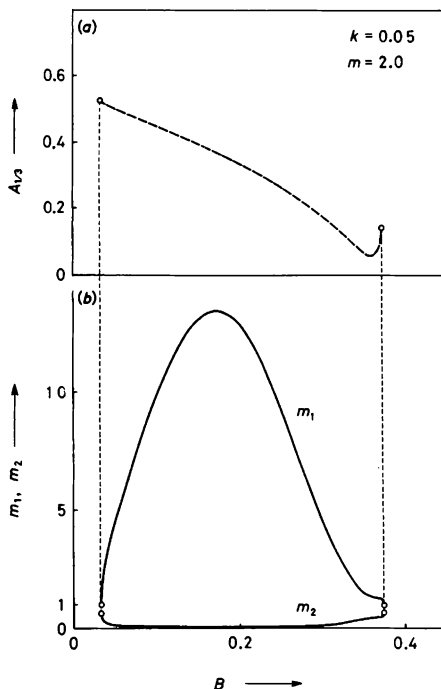


図 1.5 $\frac{1}{3}$ 調波解 (1.10) の安定性。
(a) $\frac{1}{3}$ 調波成分の振幅特性。
(b) 変分方程式 (1.64) の特性乗数。

拡大し、その結果を図 1.6 に示す。図 1.6 において振幅特性曲線 ($BA_{1/3}$ の関係) が垂直接線を持つ点が安定限界の点と一致していない。これは式 (1.6) の周期解が式 (1.10) の程度の近似解であり、式 (1.6) の周期解と変分方程式 (1.64) の解を同じ程度の近似で求めていないためと考えられる。

1.6 $\frac{1}{2}$ 調波振動^[10]

この節では近似解 (1.13) で解析される周期解の内特に $\frac{1}{2}$ 調波解について考察する。周波数 ν を $\frac{1}{2}$ とすると近似解 (1.13) は

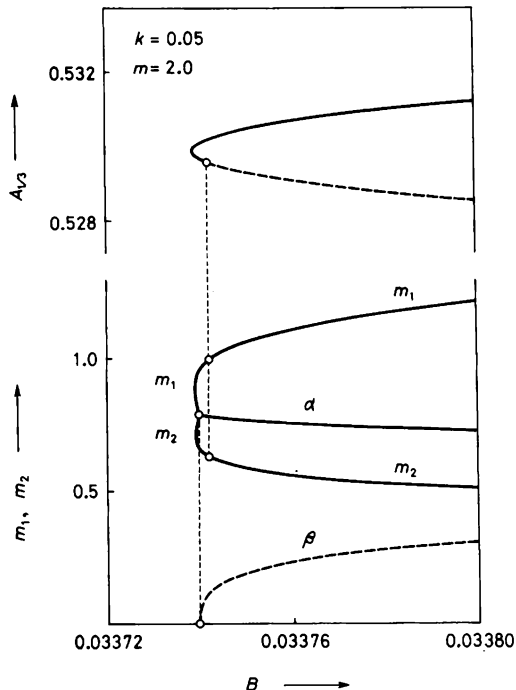


図 1.6 $\frac{1}{2}$ 調波解 (1.10) の安定限界点付近における振幅特性および特性乗数。

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{1/2} \sin(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{1/2}) + A_0 \quad (1.71)$$

となり，直流分 A_0 を含む。従って式 (1.6) において外力に直流分が含まれる場合には， $\frac{1}{2}$ 調波振動が発生しやすくなると考えられる。^[1,2,15,16] 外力が直流分を含む場合に発生する振動については第 3 章で考察する。

(a) 周期解

第 1.4 (b) 節で調波解析法を適用し，式 (1.71) の各振幅および位相角について式 (1.23) を得た。式 (1.23) より位相角 α_1 および $\alpha_{1/2}$ を消去すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(P_1 - \frac{1}{2} P_{1/2} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B_m^2 m^2 \\ & \frac{1}{4} k^2 + P_{1/2}^2 = 9 A_1^2 A_0^2, \quad 4 P_0 A_0^2 = P_{1/2} A_{1/2}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

ここに

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_{1/2}^2 + 3 A_0^2 - m \\ P_{1/2} &= \frac{3}{4} A_{1/2}^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_0^2 - \frac{m}{4} \\ P_0 &= A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/2}^2) \end{aligned}$$

式 (1.72) より振幅 A_1 ， $A_{1/2}$ ，および A_0 を求めることができる。また (1.23) より位相角 α_1 および $\alpha_{1/2}$ について次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \left(P_1 - \frac{1}{2} P_{1/2} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right) A_1 / (B_m m) \\ \cos \alpha_1 &= k \left(1 + \frac{1}{4} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right) A_1 / (B_m m) \\ \sin (\alpha_1 - 2\alpha_{1/2}) &= \frac{1}{2} k / (3 A_1 A_0) \\ \cos (\alpha_1 - 2\alpha_{1/2}) &= P_{1/2} / (3 A_1 A_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.71) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.71) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^4 \theta_n \cos\left(\frac{1}{2}n\tau - \varepsilon_n\right) \right] \eta = 0 \quad (1.74)$$

ここに θ_0 , θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 4$) は周期解 (1.71) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.74) の第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/4} \sin\left(\frac{1}{4}\tau - \sigma_{1/4}\right) + a_{3/4} \sin\left(\frac{3}{4}\tau - \sigma_{3/4}\right) \right] \quad (1.75)$$

と仮定する。式 (1.75) を式 (1.74) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。*

$$\Delta_1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \theta_{1c} & \theta_{1s} - 2\left(\frac{1}{n}\right)\mu & \theta_{1c} - \theta_{2c} & -\theta_{1s} + \theta_{2s} & \cdots \\ \theta_{1s} + 2\left(\frac{1}{n}\right)\mu & \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \theta_{1c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} - \theta_{2c} & \cdots \\ \theta_{1c} - \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 - \theta_{3c} & \theta_{3s} - 2\left(\frac{3}{n}\right)\mu & \cdots \\ -\theta_{1s} + \theta_{2s} & \theta_{1c} + \theta_{2c} & \theta_{3s} + 2\left(\frac{3}{n}\right)\mu & \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \theta_{3c} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{(m-1)c} - \theta_{mc} & \theta_{(m-1)s} + \theta_{ms} & \theta_{(m-2)c} - \theta_{(m+1)c} & \theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+1)s} & \cdots \\ -\theta_{(m-1)s} + \theta_{ms} & \theta_{(m-1)c} + \theta_{mc} & -\theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+1)s} & \theta_{(m-2)c} + \theta_{(m+1)c} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_{(m-1)c} - \theta_{mc} & -\theta_{(m-1)s} + \theta_{ms} \\ \theta_{(m-1)s} + \theta_{ms} & \theta_{(m-1)c} + \theta_{mc} \\ \theta_{(m-2)c} - \theta_{(m+1)c} & -\theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+1)s} \\ \theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+1)s} & \theta_{(m-2)c} + \theta_{(m+1)c} \\ \cdots & \cdots \\ \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{2m-1}{n}\right)^2 - \theta_{(2m-1)c} & \theta_{(2m-1)s} - 2\left(\frac{2m-1}{n}\right)\mu \\ \theta_{(2m-1)s} + 2\left(\frac{2m-1}{n}\right)\mu & \theta_0 + \mu^2 - \left(\frac{2m-1}{n}\right)^2 + \theta_{(2m-1)c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.76)$$

* 式 (1.76) を後の節で屢々用いるので一般的な形で示した。

ただし, $m = 2, n = 4$ である。

また第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における式 (1.74) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + a_{1/2} \sin(\frac{1}{2}\tau - \sigma_{1/2}) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1)] \quad (1.77)$$

と仮定する。式 (1.77) の周波数成分は周期解 (1.71) の周波数成分に等しい。式 (1.77) を式 (1.74) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

$$D_2(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 & \theta_{1s} & \theta_{1c} & \theta_{2s} & \theta_{2c} & \cdots \\ 2\theta_{1s} & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{2}{n})^2 - \theta_{2c} & \theta_{2s} - 2(\frac{2}{n})\mu & \theta_{1c} - \theta_{3c} & -\theta_{1s} + \theta_{3s} & \cdots \\ 2\theta_{1c} & \theta_{2s} + 2(\frac{2}{n})\mu & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{2}{n})^2 + \theta_{2c} & \theta_{1s} + \theta_{3s} & \theta_{1c} + \theta_{3c} & \cdots \\ 2\theta_{2s} & \theta_{1c} - \theta_{3c} & \theta_{1s} + \theta_{3s} & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{4}{n})^2 - \theta_{4c} & \theta_{4s} - 2(\frac{4}{n})\mu & \cdots \\ 2\theta_{2c} & -\theta_{1s} + \theta_{3s} & \theta_{1c} + \theta_{3c} & \theta_{4s} + 2(\frac{4}{n})\mu & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{4}{n})^2 + \theta_{4c} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\theta_{ms} & \theta_{(m-1)c} - \theta_{(m+1)c} & \theta_{(m-1)s} + \theta_{(m+1)s} & \theta_{(m-2)c} - \theta_{(m+2)c} & \theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+2)s} & \cdots \\ 2\theta_{mc} & -\theta_{(m-1)s} + \theta_{(m+1)s} & \theta_{(m-1)c} + \theta_{(m+1)c} & -\theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+2)s} & \theta_{(m-2)c} + \theta_{(m+2)c} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_{ms} & \theta_{mc} \\ \theta_{(m-1)c} - \theta_{(m+1)c} & -\theta_{(m-1)s} + \theta_{(m+1)s} \\ \theta_{(m-1)s} + \theta_{(m+1)s} & \theta_{(m-1)c} + \theta_{(m+1)c} \\ \theta_{(m-2)c} - \theta_{(m+2)c} & -\theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+2)s} \\ \theta_{(m-2)s} + \theta_{(m+2)s} & \theta_{(m-2)c} + \theta_{(m+2)c} \\ \cdots & \cdots \\ \theta_0 + \mu^2 - (\frac{2m}{n})^2 - \theta_{(2m)c} & \theta_{(2m)s} - 2(\frac{2m}{n})\mu \\ \theta_{(2m)s} + 2(\frac{2m}{n})\mu & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{2m}{n})^2 + \theta_{(2m)c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.78)$$

ただし $m = 2, n = 4$ である。

式 (1.41), 式 (1.75), および式 (1.77) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における安定条件および第 2

次不安定領域および第4次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。^[1]

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.79)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.80)$$

なお式(1.23)の関係をを用いると振幅特性曲線 (BA_1 , $BA_{1/2}$, および BA_0 の関係) が垂直接線を有する点は

$$A_2(\delta) = 0 \quad (1.81)$$

となる安定限界点と一致する。^[2, p. 105]

数値例

式(1.71)の振幅特性を式(1.72)より求め、その結果を図1.7に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 2.0 \quad (1.82)$$

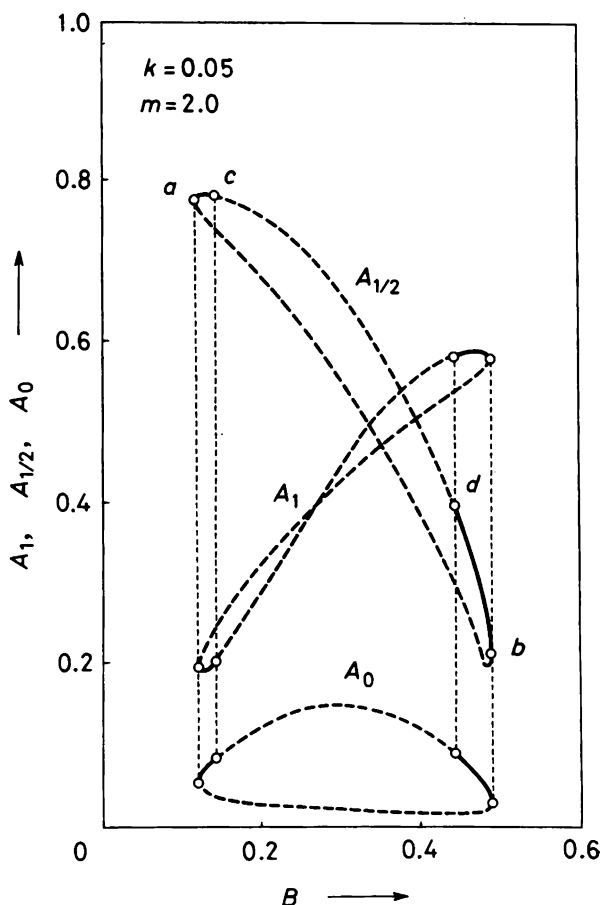


図 1.7 $\frac{1}{2}$ 調波振動の振幅特性。

である。第1.6(b)節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定となる。 $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅特性において破線 ab の部分では周期解(1.71)の周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解(1.71)が不安定となる。また破線 cd の部分では $\frac{1}{4}$ 調波成分および $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ不安定振動^{*}が励起することにより周期解(1.71)が不安定となる。^{[17], [18]}

また第1.5(c)節の考察に従って $\frac{1}{2}$ 調波解(1.71)の安定性を吟味した。そのために式(1.66)

^{*} 破線 cd の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて、 $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅は小さくなり基本調波成分の振幅は大きくなるから、固有周波数は $\frac{1}{2}$ と1の間にあると考えられる。したがって不安定振動の主要成分は $\frac{3}{4}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起すると推測される。 $\frac{3}{4}$ 調波振動の詳しい議論は第3.5(b)節で述べる。

の初期条件を用いて変分方程式 (1.64) を 1 周期数値積分することにより特性乗数 m_1 および m_2 を求めた。その結果を $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅 $A_{\frac{1}{2}}$ と共に図 1.8 および図 1.9 に示した。振幅特性曲線において実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。なお特性乗数 m_1 および m_2 が複素数 $\alpha \pm \beta i$ の場合には実数部 α を実線で表わし、虚数部 β を破線で表わした。振幅特性曲線が垂直接線と有する点が安定限界の点と一致していない。これは式 (1.6) の周期解 (1.71) は近似解であり、変分方程式 (1.64) の解を周期解 (1.71) の程度の近似で求めているためと考えられる。

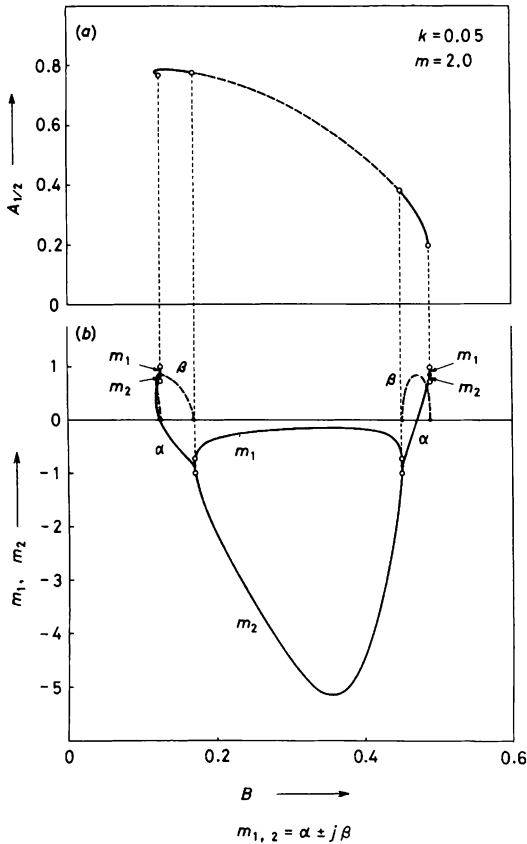


図 1.8 $\frac{1}{2}$ 調波解 (1.71) の安定性。(a) $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅特性。(b) 変分方程式 (1.64) の特性乗数。

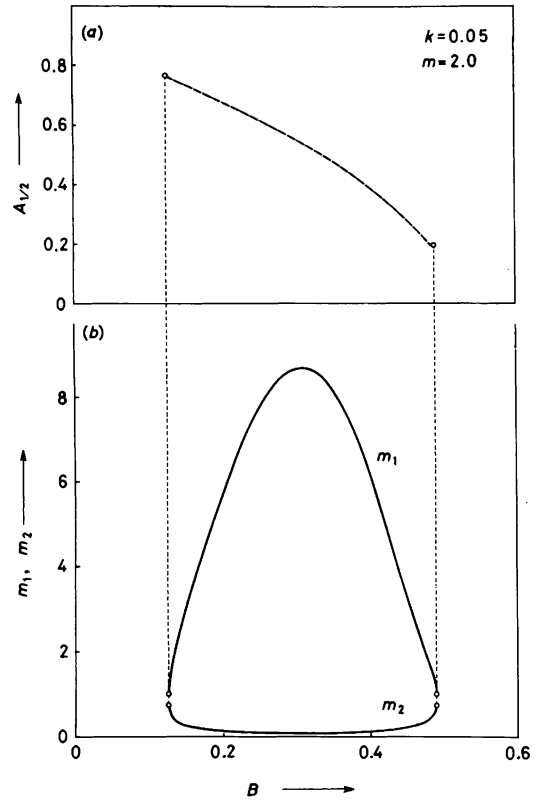


図 1.9 $\frac{1}{2}$ 調波解 (1.71) の安定性。(a) $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅特性。(b) 変分方程式 (1.64) の特性乗数。

1.7 $\frac{3}{2}$ 調波振動

外力の振幅 B が比較的小さい場合に $\frac{1}{2}$ 調波振動および $\frac{3}{2}$ 調波振動が発生することはよく知られているが、 $\frac{3}{2}$ 調波成分を顕著に持つ $\frac{3}{2}$ 調波振動あるいは $\frac{3}{2}$ 調波成分を顕著に持つ $\frac{3}{2}$ 調波振動などについては報告されていないようである。この節では $\frac{3}{2}$ 調波解について考察する。

周波数 ν を $\frac{3}{5}$ とすると近似解 (1.13) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{3/5} \sin(\frac{3}{5}\tau + \alpha_{3/5}) + A_{1/5} \sin(\frac{1}{5}\tau + \alpha_{1/5}) \quad (1.83)$$

となる。

(a) 周期解

第 1.4(b) 節で調波解析法を適用して式 (1.83) の振幅 A_1 , $A_{3/5}$, $A_{1/5}$, 位相角 α_1 , $\alpha_{3/5}$, および $\alpha_{1/5}$ について式 (1.25) を得た。式 (1.25) より各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.83) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.83) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + [\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^5 \theta_n \cos(\frac{2}{5}n\tau - \epsilon_n)] \eta = 0 \quad (1.84)$$

ここに θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 5$) は周期解 (1.83) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.84) の第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_{1/5} \sin(\frac{1}{5}\tau - \sigma_{1/5}) + a_{3/5} \sin(\frac{3}{5}\tau - \sigma_{3/5}) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1)] \quad (1.85)$$

と仮定する。式 (1.85) の周波数成分は周期解 (1.83) の周波数成分に等しい。式 (1.85) を式 (1.84) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=3$, $n=5$ である。

また第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における式 (1.84) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + a_{2/5} \sin(\frac{2}{5}\tau - \sigma_{2/5}) + a_{4/5} \sin(\frac{4}{5}\tau - \sigma_{4/5})] \quad (1.86)$$

と仮定する。式 (1.86) を式 (1.84) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=2$, $n=5$ である。

式 (1.41), 式 (1.85), および式 (1.86) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。^[1]

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.87)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.88)$$

ただし、式 (1.76) において $m=3$,
 $n=5$ とし、式 (1.78) において $m=$
 2 , $n=5$ とする。

数値例

式 (1.83) の振幅特性を式 (1.25)
より求め、その結果を図 1.10 に示
す。系のパラメータは

$$k = 0.05, \quad m = 2.0 \quad (1.89)$$

である。第 1.7(b) 節 の考察に従っ
て安定性を吟味した結果、実線の部
分で安定であり、破線の部分で不安
定である。 $\frac{3}{5}$ 調波成分の振幅特性曲
線において破線 $a b$ の部分では周期
解 (1.83) の周波数成分と同じ周波
数成分を持つ不安定振動が励起する
ことにより周期解 (1.83) が不安定
となる。また破線 $c d$ の部分では $\frac{3}{5}$
調波成分および $\frac{1}{5}$ 調波成分を持つ不
安定振動が励起することにより周期
解 (1.83) が不安定となる。^{*}

図 1.10 における破線 $c d$ の部分で励起する不安定振動の主要周波数成分を考察するために、
変分方程式 (1.84) の第 n 次不安定領域における第 1 次近似解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} a_{n/5} \sin\left(\frac{n}{5}\tau - \sigma_{n/5}\right) \quad (1.90)$$

と仮定する。式 (1.90) を式 (1.84) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

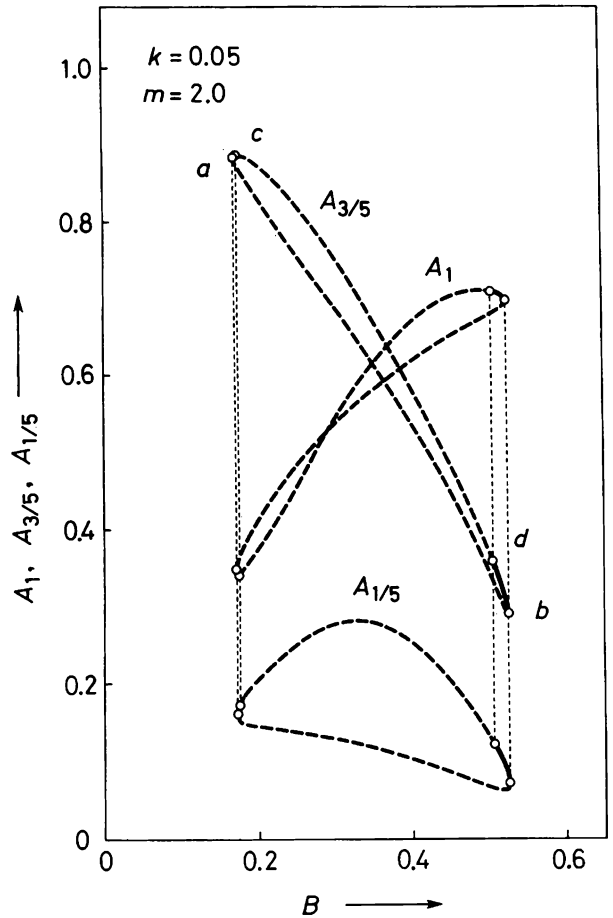


図 1.10 $\frac{3}{5}$ 調波振動の振幅特性 (安定判別は式 (1.87)
および式 (1.88) による)。

^{*} 破線 $c d$ の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて、 $\frac{3}{5}$ 調波成分の振幅 $A_{3/5}$ は小さくなり、基本
調波成分の振幅 A_1 は大きくなるから、固有周波数は $\frac{3}{5}$ と 1 の間にあると考えられる。したがって不安定
振動の主要周波数成分は $\frac{3}{5}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{3}{5}$ 調波振動が励起すると推測される。

$$\Delta_n^1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - (\frac{n}{5})^2 - \theta_{nc} & \theta_{ns} - 2(\frac{n}{5})\mu \\ \theta_{ns} + 2(\frac{n}{5})\mu & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{n}{5})^2 + \theta_{nc} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.91)$$

式(1.41)および式(1.90)より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。したがって第 n 次不安定領域における安定条件は次式で与えられる。

$$\Delta_n^1(\delta) > 0 \quad (1.92)$$

式(1.92)を用いて第2次不安定領域および第4次不安定領域における安定性を吟味した結果、図1.11において実線の部分で安定で

あり、破線の部分で不安定である。

ただし第1次不安定領域、第3次不安定領域、および第5次不安定領域における安定性を式(1.87)に従って吟味した。図1.11の $\frac{3}{5}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分では

$$\Delta_2^1(\delta) > 0, \quad \Delta_4^1(\delta) < 0 \quad (1.93)$$

となり、第4次不安定領域で解(1.90)が不安定となる。したがって $\frac{3}{5}$ 調波振動が励起することにより $\frac{3}{5}$ 調波解(1.83)が不安定となる。

なお図1.10あるいは図1.11においてパラメタ B の狭い範囲で $\frac{3}{5}$ 調波解(1.83)が安定となる結果を得たが、 $\frac{3}{5}$ 調波解は式(1.83)の程度の近似解であるから、式(1.6)が安定な $\frac{3}{5}$ 調波解を持つかどうか断定することはできない。

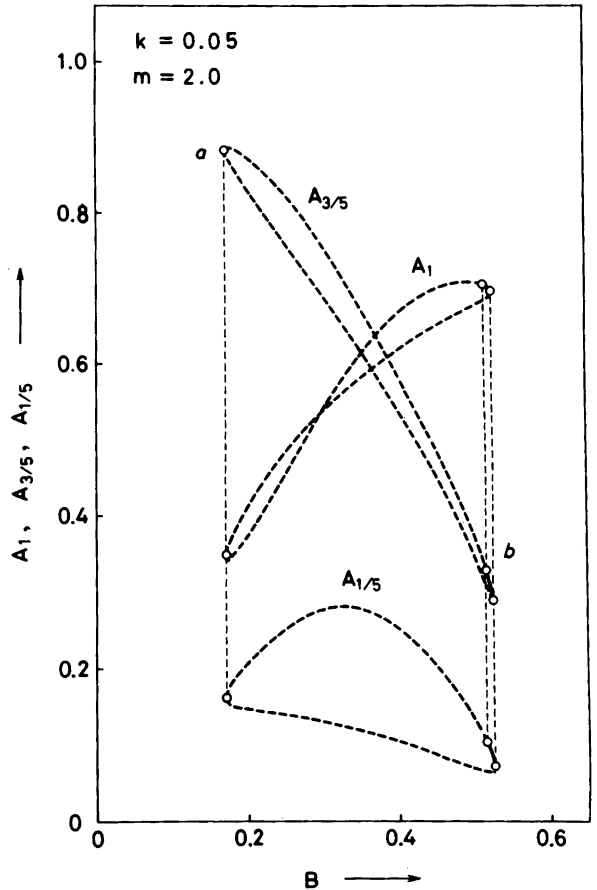


図 1.11 $\frac{3}{5}$ 調波振動の振幅特性 (偶数次不安定領域における安定性は式(1.92)による)。

1.8 ⅓調波振動

この節では⅓調波解を求め、その安定性を吟味する。周波数 ν を⅓とすると近似解 (1.13) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\tau + \alpha_{2/3}\right) + A_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{1/3}\right) \quad (1.94)$$

となる。第 1.4(b) 節において調波解析法を適用して式 (1.94) の振幅 A_1 , $A_{2/3}$, $A_{1/3}$, および位相角 α_1 , $\alpha_{2/3}$, および $\alpha_{1/3}$ について式 (1.26) を得た。式 (1.26) より周期解 (1.94) の各振幅および位相角を求め、第 1.5(b) 節と同様の考察を行って周期解 (1.94) の安定性を吟味したが、⅓調波解が式 (1.94) の程度の近似では実験結果に対応する妥当な結果が得られなかった。この節ではさらに高次の近似解を求め、その安定性を吟味する。

第 2 次近似解 (1.13) を式 (1.11) の右辺に代入し両辺を積分すれば、 v の周波数 1, ν , および $1 - 2\nu$ 以外の周波数成分が現われる。解の各周波数成分の内、周波数 ν が⅓の近傍で振幅の比較的大きいもののみを考慮して v の高次の近似として次式を仮定する。^{*}

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu\tau + \alpha_\nu) + A_{1-2\nu} \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_{1-2\nu}] + A_{2-3\nu} \sin[(2-3\nu)\tau + \alpha_{2-3\nu}] \quad (1.95)$$

周波数 ν を⅓とすると式 (1.95) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\tau + \alpha_{2/3}\right) + A_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{1/3}\right) + A_0 \quad (1.96)$$

となる。

(a) 周期解

周期解 (1.96) の振幅 A_1 , $A_{2/3}$, $A_{1/3}$, A_0 , 位相角 α_1 , $\alpha_{2/3}$, $\alpha_{1/3}$ を決定するために、式 (1.96) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, ⅓, および ⅓の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_1 A_1 + \frac{3}{4} A_{2/3}^2 A_{1/3} \cos \varphi_1 - \frac{1}{4} A_{1/3}^3 \cos \varphi_2 - 3 A_{2/3} A_{1/3} A_0 \sin \varphi_3 - B_m m \sin \alpha_1 &= 0 \\ k_1 A_1 + \frac{3}{4} A_{2/3}^2 A_{1/3} \sin \varphi_1 + \frac{1}{4} A_{1/3}^3 \sin \varphi_2 - 3 A_{2/3} A_{1/3} A_0 \cos \varphi_3 - B_m m \cos \alpha_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

* 周波数 ν が⅓, ⅓, および⅓のとき、式 (1.95) の周波数成分は式 (1.13) の周波数成分に等しい。

$$\begin{aligned}
P_2 A_{2/3} + \frac{3}{2} A_1 A_{2/3} A_{1/3} \cos \varphi_1 - \frac{3}{2} A_{1/3}^2 A_0 \sin \varphi_4 - 3 A_1 A_{1/3} A_0 \sin \varphi_3 &= 0 \\
\frac{2}{3} k A_{2/3} + \frac{3}{2} A_1 A_{2/3} A_{1/3} \sin \varphi_1 - \frac{3}{2} A_{1/3}^2 A_0 \cos \varphi_4 - 3 A_1 A_{1/3} A_0 \cos \varphi_3 &= 0 \\
P_3 A_{1/3} + \frac{3}{4} A_1 A_{2/3}^2 \cos \varphi_1 - \frac{3}{4} A_1 A_{1/3}^2 \cos \varphi_2 - 3 A_1 A_{2/3} A_0 \sin \varphi_3 + 3 A_{2/3} A_{1/3} A_0 \sin \varphi_4 &= 0 \\
\frac{1}{3} k A_{1/3} + \frac{3}{4} A_1 A_{2/3}^2 \sin \varphi_1 + \frac{3}{4} A_1 A_{1/3}^2 \sin \varphi_2 - 3 A_1 A_{2/3} A_0 \cos \varphi_3 - 3 A_{2/3} A_{1/3} A_0 \cos \varphi_4 &= 0 \\
P_0 A_0 - \frac{3}{4} A_{2/3} A_{1/3}^2 \sin \varphi_4 - \frac{3}{2} A_1 A_{2/3} A_{1/3} \sin \varphi_3 &= 0
\end{aligned}$$

ここに

(1.97)

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{2/3}^2 + A_{1/3}^2) + 3 A_0^2 - m$$

$$P_2 = \frac{3}{4} A_{2/3}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/3}^2) + 3 A_0^2 - \frac{4}{9} m$$

$$P_3 = \frac{3}{4} A_{1/3}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{2/3}^2) + 3 A_0^2 - \frac{1}{9} m$$

$$P_0 = 3 A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{2/3}^2 + A_{1/3}^2)$$

$$\varphi_1 = \alpha_1 - 2\alpha_{2/3} + \alpha_{1/3},$$

$$\varphi_2 = \alpha_1 - 3\alpha_{1/3}$$

$$\varphi_3 = \alpha_1 - \alpha_{2/3} - \alpha_{1/3},$$

$$\varphi_4 = \alpha_{2/3} - 2\alpha_{1/3}$$

式 (1.97) より周期解 (1.96) の各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.96) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.96) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^6 \theta_n \cos \left(\frac{n}{3} \tau - \epsilon_n \right) \right] \eta = 0 \quad (1.98)$$

ここに θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 6$) は周期解 (1.96) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.98) の第 1 次不安定領域、第 3 次不安定領域、および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/6} \sin\left(\frac{1}{6}\tau - \sigma_{1/6}\right) + a_{3/6} \sin\left(\frac{3}{6}\tau - \sigma_{3/6}\right) + a_{5/6} \sin\left(\frac{5}{6}\tau - \sigma_{5/6}\right) \right] \quad (1.99)$$

と仮定する。式(1.99)を式(1.98)に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式(1.76)を得る。ただし式(1.76)において $m=3$, $n=6$ である。

また第2次不安定領域, 第4次不安定領域, および第6次不安定領域における式(1.98)の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_0 + a_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau - \sigma_{1/3}\right) + a_{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\tau - \sigma_{2/3}\right) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) \right] \quad (1.100)$$

と仮定する。式(1.100)の周波数成分は周期解(1.96)の周波数成分に等しい。式(1.100)を式(1.98)に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式(1.78)を得る。ただし式(1.78)において $m=3$, $n=6$ である。

式(1.41), 式(1.99), および式(1.100)より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式(1.76)および式(1.78)を用いて第1次不安定領域, 第3次不安定領域, および第5次不安定領域における安定条件および第2次不安定領域, 第4次不安定領域, および第6次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.101)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.102)$$

ただし 式(1.76)および式(1.78)において $m=3$, $n=6$ とする。

数値例

式(1.96)の振幅特性を式(1.97)より求め, その結果を図1.12に示す。系のパラメータは

$$k = 0.05, \quad m = 2.0 \quad (1.103)$$

である。第1.8(b)節の考察に従って安定性を吟味した結果, 実線の部分で安定であり, 破線の部分で不安定である。 $\frac{2}{3}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分では周期解(1.96)の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解(1.96)が不安定となる。また破線 cd の部分では $\frac{1}{6}$ 調波成分, $\frac{5}{6}$ 調波成分, および $\frac{5}{6}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解(1.96)が不安定となる。^{*}

* 破線 cd の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて $\frac{2}{3}$ 調波成分の振幅 $A_{2/3}$ が小さくなり, 基本調波成分の振幅 A_1 は大きくなるから, 固有周波数は $\frac{2}{3}$ と1の間にあると考えられる。したがって不安定振動の主要周波数成分は $\frac{1}{6}$ 調波成分であると考えられ, $\frac{5}{6}$ 調波振動が励起すると推測される。

図 1.12 の破線 cd の部分で励起する不安定振動の主要周波数成分を考察するために、変分方程式 (1.98) の解が何次の不安定領域において不安定となるかを調べる。式 (1.98) の第 n 次不安定領域における第 1 次近似解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} a_{n/6} \sin\left(\frac{n}{6}\tau - \sigma_{n/6}\right) \quad (1.104)$$

と仮定する。式 (1.104) を式 (1.98) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

$$\Delta_n^1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - (n/6)^2 - \theta_{nc} & \theta_{ns} - 2(n/6)\mu \\ \theta_{ns} + 2(n/6)\mu & \theta_0 + \mu^2 - (n/6)^2 + \theta_{nc} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.105)$$

式 (1.41) および式 (1.104) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。したがって第 n 次不安定領域における安定条件は次式で与えられる。

$$\Delta_n^1(\delta) > 0 \quad (1.106)$$

式 (1.106) を用いて第 1 次不安定領域、第 3 次不安定領域、および第 5 次不安定領域における安定性を吟味した結果、図 1.12 において曲線 $acdb$ の部分では

$$\Delta_1^1 > 0, \quad \Delta_3^1 > 0, \quad \Delta_5^1 < 0 \quad (1.107)$$

となり、第 5 次不安定領域で解 (1.104) は不安定となる。したがって $5/6$ 調波成分よりなる不安定振動が励起することにより $5/6$ 調波解 (1.96) が不安定となる。

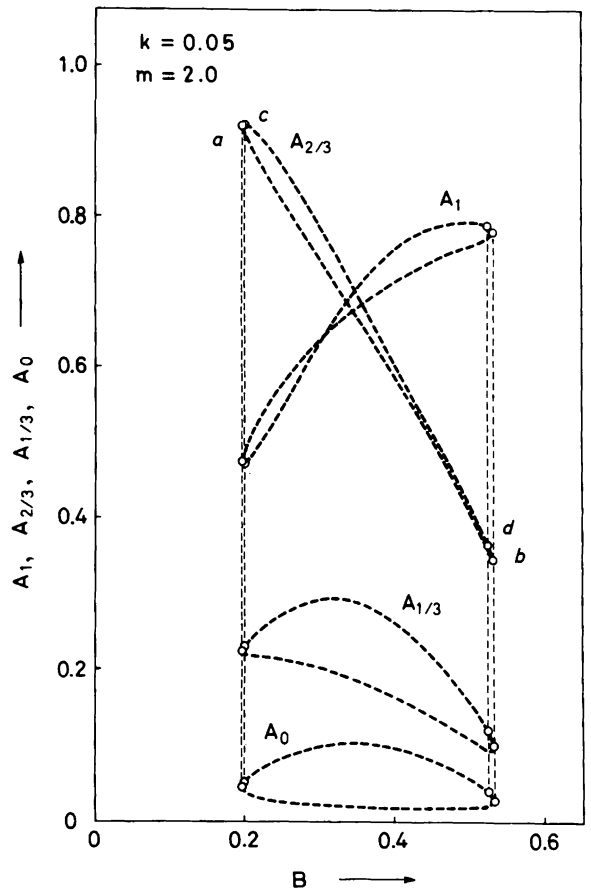


図 1.12 $5/6$ 調波振動の振幅特性。

1.9 $5/6$ 調波振動

この節では近似解 (1.14) で解析される周期解の内特に $5/6$ 調波解について考察

する。周波数 ν を $\frac{3}{2}$ とすると近似解 (1.14) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{3/2} \sin(\frac{3}{2}\tau + \alpha_{3/2}) + A_{1/2} \sin(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{1/2}) \quad (1.108)$$

となる。

(a) 周期解

第 1.4(b) 節で調波解析法を適用して式 (1.108) の振幅 $A_1, A_{3/2}, A_{1/2}$, 位相角 $\alpha_1, \alpha_{3/2}$, および $\alpha_{1/2}$ について式 (1.28) を得た。式 (1.28) より位相角 $\alpha_1, \alpha_{3/2}$, および $\alpha_{1/2}$ を消去すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \left[(P_1 - 3P_2 \frac{A_{3/2}^2}{A_1^2} + P_3 \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2})^2 + k^2 (1 + \frac{9}{4} \frac{A_{3/2}^2}{A_1^2} + \frac{1}{4} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2})^2 \right] A_1^2 = B_m^2 m^2 \\ & \frac{1}{4} k^2 (3A_{3/2}^2 - A_{1/2}^2)^2 + 4(P_2 A_{3/2}^2 - P_3 A_{1/2}^2)^2 = A_{3/2}^2 A_{1/2}^6 \\ & \frac{1}{4} k^2 (9A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2)^2 + (6P_2 A_{3/2}^2 - 2P_3 A_{1/2}^2)^2 = A_1^4 A_{3/2}^2 A_{1/2}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.109)$$

ここに

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2) - m \\ P_2 &= \frac{3}{4} A_{3/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/2}^2) - \frac{9}{4} m \\ P_3 &= \frac{3}{4} A_{1/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{3/2}^2) - \frac{1}{4} m \end{aligned}$$

式 (1.109) より振幅 $A_1, A_{3/2}$, および $A_{1/2}$ を求めることができる。また式 (1.28) より位相角 $\alpha_1, \alpha_{3/2}$, および $\alpha_{1/2}$ について次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_1 &= (P_1 - 3P_2 \frac{A_{3/2}^2}{A_1^2} + P_3 \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2}) A_1 / B_m m \\ \cos \alpha_1 &= k (1 + \frac{9}{4} \frac{A_{3/2}^2}{A_1^2} + \frac{1}{4} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2}) A_1 / B_m m \\ \sin(\alpha_{3/2} - 3\alpha_{1/2}) &= \frac{1}{2} k (A_{1/2}^2 - 3A_{3/2}^2) / (A_{3/2}^2 A_{1/2}^2) \\ \cos(\alpha_{3/2} - 3\alpha_{1/2}) &= 2(P_3 A_{1/2}^2 - P_2 A_{3/2}^2) / (A_{3/2}^2 A_{1/2}^2) \\ \sin(-2\alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) &= -\frac{1}{6} k (9A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2) / (A_1^2 A_{3/2}^2 A_{1/2}^2) \\ \cos(-2\alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) &= \frac{1}{3} (2P_3 A_{1/2}^2 - 6P_2 A_{3/2}^2) / (A_1^2 A_{3/2}^2 A_{1/2}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.108) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.108) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^6 \theta_n \cos\left(\frac{n}{2}\tau - \varepsilon_n\right) \right] \eta = 0 \quad (1.111)$$

ここに θ_0, θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 6$) は周期解 (1.108) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式は付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.111) の第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/4} \sin\left(\frac{1}{4}\tau - \sigma_{1/4}\right) + a_{3/4} \sin\left(\frac{3}{4}\tau - \sigma_{3/4}\right) + a_{5/4} \sin\left(\frac{5}{4}\tau - \sigma_{5/4}\right) \right] \quad (1.112)$$

と仮定する。式 (1.112) を式 (1.111) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=3, n=4$ である。また第 2 次不安定領域, 第 4 次不安定領域, および第 6 次不安定領域における式 (1.111) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\tau - \sigma_{1/2}\right) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_{3/2} \sin\left(\frac{3}{2}\tau - \sigma_{3/2}\right) \right] \quad (1.113)$$

と仮定する。式 (1.113) の周波数成分は周期解 (1.108) の周波数成分に等しい。式 (1.113) を式 (1.111) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) における行列式の第 1 行および第 1 列を除く。また $m=3, n=4$ である。

式 (1.41), 式 (1.112), および式 (1.113) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域, 第 4 次不安定領域, および第 6 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.114)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.115)$$

ただし 式 (1.76) および式 (1.78) において $m=3, n=4$ とする。

数値例

式 (1.108) の振幅特性を式 (1.109) より求め, その結果を図 1.13 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.01, \quad m = 1.0 \quad (1.116)$$

である。第 1.9(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。 $\frac{3}{2}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 $a b$ の部分では周期解 (1.108) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.108) が不安定となる。また破線 $c d$ の部分および破線 $e f$ の部分では $\frac{1}{4}$ 調波成分 $\frac{3}{4}$ 調波成分、および $\frac{5}{4}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.108) が不安定となる。

1.10 $\frac{5}{3}$ 調波振動^[10]

この節では近似解 (1.14) で解析される周期解の内特に $\frac{5}{3}$ 調波解について考察する。周波数 ν を $\frac{5}{3}$ とすると近似解 (1.14) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{5/3} \sin\left(\frac{5}{3}\tau + \alpha_{5/3}\right) + A_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{1/3}\right) \quad (1.117)$$

となる。

(a) 周期解

第 1.4(b) 節で調波解析法を適用して式 (1.117) の振幅 $A_1, A_{5/3}, A_{1/3}$, 位相角 $\alpha_1, \alpha_{5/3}$, および $\alpha_{1/3}$ について式 (1.30) を得た。式 (1.30) より各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.117) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.117) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^5 \theta_n \cos\left(\frac{2}{3}n\tau - \epsilon_n\right) \right] \eta = 0 \quad (1.118)$$

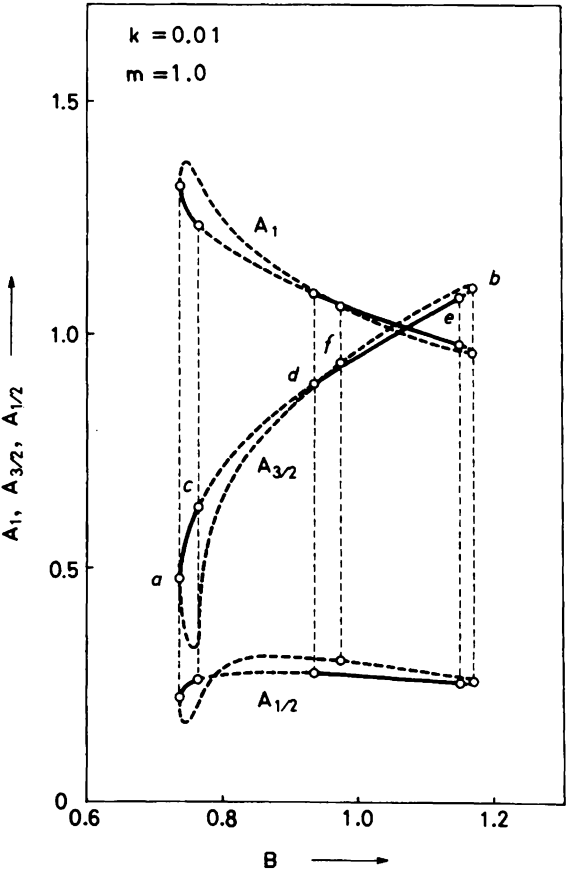


図 1.13 $\frac{3}{2}$ 調波振動の振幅特性。

ここに θ_0, θ_n , および $\varepsilon_n (n=1 \sim 5)$ は周期解 (1.117) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.118) の第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau - \sigma_{1/3}\right) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_{5/3} \sin\left(\frac{5}{3}\tau - \sigma_{5/3}\right) \right] \quad (1.119)$$

と仮定する。式 (1.119) の周波数成分は周期解 (1.117) の周波数成分に等しい。式 (1.119) を式 (1.118) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=3, n=3$ である。また第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における式 (1.118) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_0 + a_{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\tau - \sigma_{2/3}\right) + a_{4/3} \sin\left(\frac{4}{3}\tau - \sigma_{4/3}\right) \right] \quad (1.120)$$

と仮定する。式 (1.120) を式 (1.118) に代入し, 調波解析を行なうと式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=2, n=3$ である。

式 (1.41), 式 (1.119), および式 (1.120) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.121)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.122)$$

ただし 式 (1.76) において $m=3, n=3$ とし, 式 (1.78) において $m=2, n=3$ とする。

数値例

式 (1.117) の振幅特性を式 (1.30) より求め, その結果を図 1.14 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05 \quad m = 0.4 \quad (1.123)$$

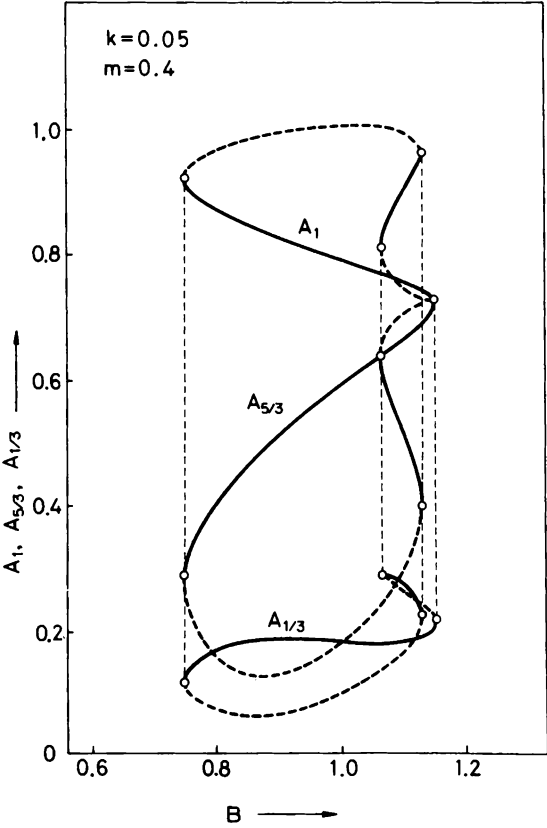


図 1.14 5%調波振動の振幅特性。

である。第 1.10 (b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。破線の部分では周期解 (1.117) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.117) が不安定となる。

[19]

1.11 第 2 高調波振動

この節では第 2 高調波解を求め、その安定性を吟味する。周波数 ν を 2 とすると近似解 (1.14) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \quad (1.124)$$

となる。

(a) 周期解

第 1.4 (b) 節で調波解析法を適用して式 (1.124) の振幅 A_1, A_2, A_0 , 位相角 α_1 , および α_2 について式 (1.31) を得た。式 (1.31) より位相角 α_1 および α_2 を消去すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \left[(P_1 - 2P_2 \frac{A_2^2}{A_1^2})^2 + k^2 (1 + 4 \frac{A_2^2}{A_1^2})^2 \right] A_1^2 = B_m^2 m^2 \\ & 4(4k^2 + P_2^2) A_2^2 = 9A_1^4 A_0^2 \\ & 2P_0 A_0^2 = P_2 A_2^2 \\ & P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_2^2 + 3A_0^2 - m \\ & P_2 = \frac{3}{4} A_2^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3A_0^2 - 4m \\ & P_0 = A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

ここに

式 (1.125) より振幅 A_1, A_2 , および A_0 を求めることができる。また式 (1.31) より位相角 α_1 および α_2 について次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \sin \alpha_1 = (P_1 - 2P_2 \frac{A_2^2}{A_1^2}) A_1 / (B_m m) \\ & \cos \alpha_1 = k (1 + 4 \frac{A_2^2}{A_1^2}) A_1 / (B_m m) \\ & \sin (\alpha_2 - 2\alpha_1) = 2P_2 A_2 / (3A_1^2 A_0) \\ & \cos (\alpha_2 - 2\alpha_1) = 4k A_2 / (3A_1^2 A_0) \end{aligned} \right\} \quad (1.126)$$

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.124) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.124) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^4 \theta_n \cos(n\tau - \epsilon_n) \right] \eta = 0 \quad (1.127)$$

ここに θ_0, θ_n , および $\epsilon_n (n=1 \sim 4)$ は周期解 (1.124) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式は付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.127) の第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\tau - \sigma_{1/2}\right) + a_{3/2} \sin\left(\frac{3}{2}\tau - \sigma_{3/2}\right) \right] \quad (1.128)$$

と仮定する。式 (1.128) を式 (1.127) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし 式 (1.76) において $m=2, n=2$ である。また第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における式 (1.127) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_0 + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2) \right] \quad (1.129)$$

と仮定する。式 (1.129) の周波数成分は周期解 (1.124) の周波数成分に等しい。式 (1.129) を式 (1.127) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=2, n=2$ である。

式 (1.41), 式 (1.128), および式 (1.129) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域および第 3 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.130)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.131)$$

ただし 式 (1.76) および式 (1.78) において $m=2, n=2$ とする。

以上は第 1 次不安定領域から第 4 次不安定領域における安定性を考察した。一般には第 5 次不安定領域, 第 6 次不安定領域, …における安定性も考察しなければならないが, これは θ_0 が大きい範囲で問題となる。 θ_0 が大きいときには周期解 (1.124) の振幅が大きく, したがって外力の振幅 B も大きい。このとき周期解 (1.124) には周波数 ν が 2 以上の高調波成分が含まなければならない。第 2 高調波成分および第 3 高調波成分を顕著に持つ周期解は第 1.11 (c)

節で考察する。また $\frac{1}{2}$ 調波解は第 1.12 節で考察する。

数値例

式 (1.124) の振幅特性を式 (1.125) より求め、その結果を図 1.15 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 0.4 \quad (1.132)$$

である。第 1.11(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。破線の部分では周期解 (1.124) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.124) は不安定となる。なお図 1.15 に示した数値例では $\frac{1}{2}$ 調波成分および $\frac{3}{2}$ 調波成分を持つ振動が励起しないが、外力が直流分を持つ場合には、これらの周波数成分を持つ振動が励起することがある。この種の周期振動については第 3.7 節で考察する。

(c) 高次の近似解とその安定性

式 (1.6) の外力の振幅 B が大きくなれば解には第 3 高調波成分が顕著に現われることを第 1.5 節で示した。また外力の振幅 B が大なる場合には、基本調波成分が大きくなり、式 (1.12) において第 3 高調波成分が顕著に現われることを考慮して、式 (1.6) の解を式 (1.15) のよう

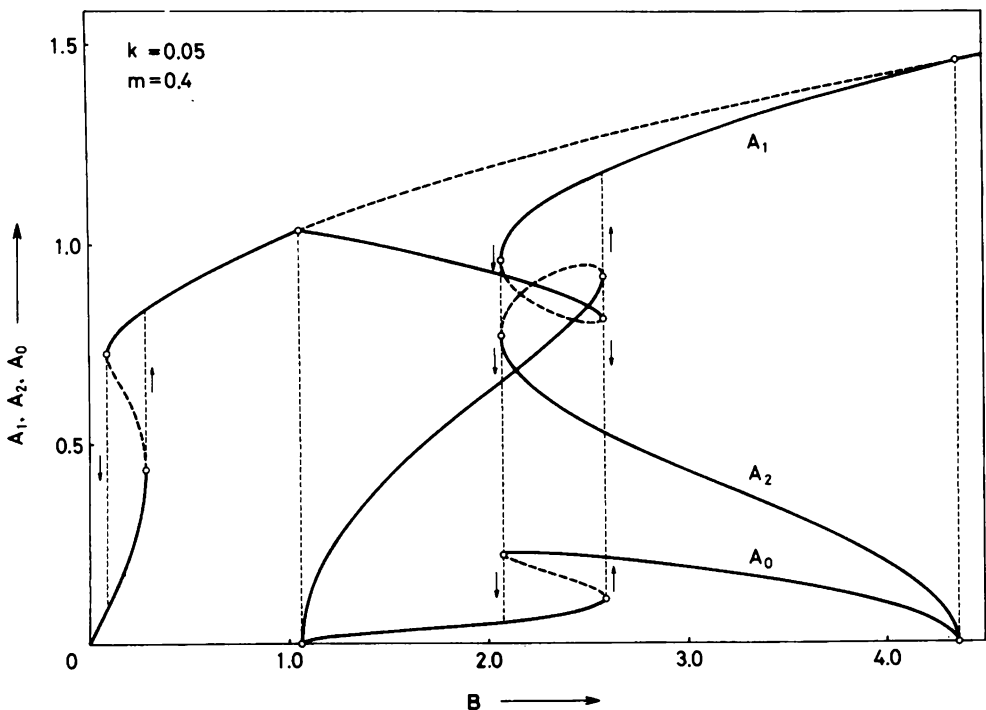


図 1.15 第 2 高調波振動の振幅特性。

に仮定した。周波数 ν を 2 とすると式 (1.15) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) + A_0 \quad (1.133)$$

となる。^{*} まず調波解析法により周期解 (1.133) の各振幅および位相角を決定する。式 (1.133) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, 2, および 3 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_1 A_1 + 3 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi_1 - \frac{3}{4} A_1^2 A_3 \cos \varphi_2 + \frac{3}{4} A_2^2 A_3 \cos \varphi_3 + 3 A_2 A_3 A_0 \sin \varphi_4 - B_m m \sin \alpha_1 &\equiv X_1 = 0 \\ k A_1 + 3 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi_1 + \frac{3}{4} A_1^2 A_3 \sin \varphi_2 - \frac{3}{4} A_2^2 A_3 \sin \varphi_3 + 3 A_2 A_3 A_0 \cos \varphi_4 - B_m m \cos \alpha_1 &\equiv Y_1 = 0 \\ P_2 A_2 + \frac{3}{2} A_1^2 A_0 \sin \varphi_1 + \frac{3}{2} A_1 A_2 A_3 \cos \varphi_3 + 3 A_1 A_3 A_0 \sin \varphi_4 &\equiv X_2 = 0 \\ 2 k A_2 - \frac{3}{2} A_1^2 A_0 \cos \varphi_1 + \frac{3}{2} A_1 A_2 A_3 \sin \varphi_3 + 3 A_1 A_3 A_0 \cos \varphi_4 &\equiv Y_2 = 0 \\ P_3 A_3 + \frac{3}{4} A_1 A_2^2 \cos \varphi_3 + 3 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi_4 - \frac{1}{4} A_1^3 \cos \varphi_2 &\equiv X_3 = 0 \\ 3 k A_3 - \frac{3}{4} A_1 A_2^2 \sin \varphi_3 - 3 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi_4 - \frac{1}{4} A_1^3 \sin \varphi_2 &\equiv Y_3 = 0 \\ P_0 A_0 + \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \sin \varphi_1 + \frac{3}{2} A_1 A_2 A_3 \sin \varphi_4 &\equiv X_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.134)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_2^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - m$$

$$P_2 = \frac{3}{4} A_2^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - 4 m$$

$$P_3 = \frac{3}{4} A_3^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2) + 3 A_0^2 - 9 m$$

$$P_0 = A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

$$\varphi_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\varphi_2 = 3\alpha_1 - \alpha_3$$

$$\varphi_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$$

$$\varphi_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

式 (1.134) より周期解 (1.133) の各振幅および位相角を求めることができる。

^{*} 式 (1.133) の各周波数成分は周波数 ν が 2 および 3 の場合の第 2 次近似解 (1.14) の周波数成分に等しい。

つぎに周期解 (1.133) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は式 (1.134) より求められているから、式 (1.133) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^6 \theta_n \cos(n\tau - \epsilon_n) \right] \eta = 0 \quad (1.135)$$

ここに θ_0, θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 6$) は周期解 (1.133) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.135) の第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_{1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\tau - \sigma_{1/2}\right) + a_{3/2} \sin\left(\frac{3}{2}\tau - \sigma_{3/2}\right) + a_{5/2} \sin\left(\frac{5}{2}\tau - \sigma_{5/2}\right) \right] \quad (1.136)$$

と仮定する。式 (1.136) を式 (1.135) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=3, n=2$ である。また第 2 次不安定領域, 第 4 次不安定領域, および第 6 次不安定領域における式 (1.135) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_0 + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2) + a_3 \sin(3\tau - \sigma_3) \right] \quad (1.137)$$

と仮定する。式 (1.137) の各周波数成分は周期解 (1.133) の各周波数成分に等しい。式 (1.137) を式 (1.135) に代入し, 調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=3, n=2$ である。

式 (1.41), 式 (1.136), および式 (1.137) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域, 第 4 次不安定領域, および第 6 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Delta_1(\delta) > 0 \quad (1.138)$$

$$\Delta_2(\delta) > 0 \quad (1.139)$$

ただし 式 (1.76) および式 (1.78) において $m=3, n=2$ とする。

数値例

式 (1.133) の振幅特性を式 (1.134) より求め, その結果を図 1.16 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 0.15 \quad (1.140)$$

である。第 1.11(c) 節の考察に従って安定性を吟味した結果, 実線の部分で安定であり, 破線の部分で不安定である。基本調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分, 破線 cd の部分,

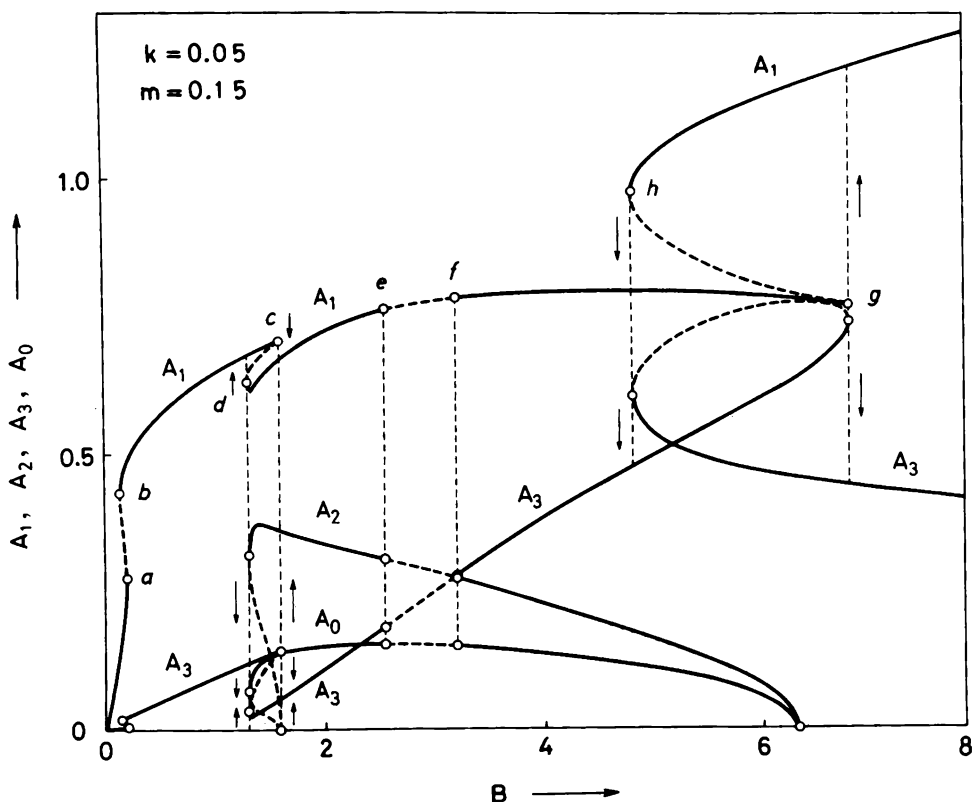


図 1.16 第2高調波振動および第3高調波振動の振幅特性。

および破線 gh の部分では安定条件式 (1.139) が満たされない。すなわち周期解 (1.133) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.133) が不安定となる。また破線 ef の部分では安定条件式 (1.138) が満たされない。すなわち $\frac{1}{2}$ 調波成分, $\frac{3}{2}$ 調波成分, および $\frac{5}{2}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.133) が不安定となる。

1.12 $\frac{5}{2}$ 調波振動

前節において第2高調波解 (1.133) の安定性を文献 [1] の方法で考察した。その結果周期解に第2高調波成分および第3高調波成分が顕著に含まれる場合に $\frac{1}{2}$ 調波成分, $\frac{3}{2}$ 調波成分, および $\frac{5}{2}$ 調波成分を持つ振動* が励起することが明らかとなった。この節では $\frac{5}{2}$ 調波成分を顕著に持つ $\frac{5}{2}$ 調波振動について考察する。 $\frac{5}{2}$ 調波振動は第2高調波および第3高調波成分も含む

* 図 1.16 において $\frac{1}{2}$ 調波成分, $\frac{3}{2}$ 調波成分, および $\frac{5}{2}$ 調波成分を持つ振動が励起することにより周期解 (1.133) が不安定となる外力の振幅 B の範囲では, B を増加するにつれて第2高調波成分は小さくなり, 第3高調波成分は大きくなるから, 固有周波数は2と3の間にあるものと考えられる。したがって励起する振動の主要周波数成分は $\frac{5}{2}$ 調波成分であると考えられ, $\frac{5}{2}$ 調波振動が励起すると推測される。

と考えられる。また式 (1.14) より式 (1.6) の解の主要周波数成分は外力周波数を 1 とすれば、これと周波数 ν および $2-\nu$ の周波数成分である。従って周波数 ν が 2, $\frac{5}{2}$, および 3 の場合の周期解を次式のように仮定する。^{*}

$$\begin{aligned} v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \\ & + A_{\frac{5}{2}} \sin(\frac{5}{2}\tau + \alpha_{\frac{5}{2}}) + A_{\frac{1}{2}} \sin(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{\frac{1}{2}}) \\ & + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) \end{aligned} \quad (1.141)$$

(a) 周期解

調波解析法により周期解 (1.141) の各振幅および位相角を決定するために式 (1.141) を式 (1.6) に代入し、周波数 1, 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$, および 3 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\begin{aligned} P_1 A_1 + \frac{3}{4} [& A_2^2 A_3 \cos \varphi_1 - A_1^2 A_3 \cos \varphi_2 - A_2 A_{\frac{1}{2}}^2 \cos \varphi_3 \\ & + 2 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_3 \cos \varphi_4 - 2 A_1 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_5 + 2 A_2 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_6 \\ & + 2 A_0 A_{\frac{1}{2}}^2 \sin \varphi_7 - 4 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi_8 - 4 A_2 A_0 A_3 \sin \varphi_9] - B_m m \sin \alpha_1 \equiv X_1 = 0 \\ k A_1 + \frac{3}{4} [& A_2^2 A_3 \sin \varphi_1 - A_1^2 A_3 \sin \varphi_2 - A_2 A_{\frac{1}{2}}^2 \sin \varphi_3 \\ & + 2 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_3 \sin \varphi_4 - 2 A_1 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_5 + 2 A_2 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_6 \\ & + 2 A_0 A_{\frac{1}{2}}^2 \cos \varphi_7 - 4 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi_8 - 4 A_2 A_0 A_3 \cos \varphi_9] - B_m m \cos \alpha_1 \equiv Y_1 = 0 \\ P_2 A_2 + \frac{3}{4} [& -A_1 A_{\frac{1}{2}}^2 \cos \varphi_3 + A_{\frac{5}{2}}^2 A_3 \cos \varphi_{10} - A_{\frac{1}{2}}^2 A_3 \cos \varphi_{11} + 2 A_1 A_2 A_3 \cos \varphi_1 \\ & + 2 A_1 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_6 - 2 A_1^2 A_0 \sin \varphi_8 - 4 A_0 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_{12} - 4 A_1 A_0 A_3 \sin \varphi_9] \equiv X_2 = 0 \\ 2 k A_2 + \frac{3}{4} [& A_1 A_{\frac{1}{2}}^2 \sin \varphi_3 + A_{\frac{5}{2}}^2 A_3 \sin \varphi_{10} - A_{\frac{1}{2}}^2 A_3 \sin \varphi_{11} - 2 A_1 A_2 A_3 \sin \varphi_1 \\ & + 2 A_1 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_6 + 2 A_1^2 A_0 \cos \varphi_8 - 4 A_0 A_{\frac{5}{2}} A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_{12} + 4 A_1 A_0 A_3 \cos \varphi_9] \equiv Y_2 = 0 \end{aligned}$$

* 電気回路における実験によれば、式 (1.141) の各周波数成分が他の周波数成分に比較して優勢であることが観察された。

$$\begin{aligned}
P_0 A_0 - \frac{3}{4} [A_1^2 A_2 \sin \varphi_8 - A_1 A_{1/2}^2 \sin \varphi_7 + 2 A_1 A_2 A_3 \sin \varphi_9 \\
- 2 A_{5/2} A_{1/2} A_3 \sin \varphi_{13} + 2 A_2 A_{5/2} A_{1/2} \sin \varphi_{12}] \equiv X_0 = 0 \\
P_{5/2} A_{5/2} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{1/2} \cos \varphi_5 + 2 A_1 A_2 A_{1/2} \cos \varphi_6 + 2 A_2 A_{5/2} A_3 \cos \varphi_{10} \\
+ 2 A_1 A_{1/2} A_3 \cos \varphi_4 + 4 A_0 A_{1/2} A_3 \sin \varphi_{13} - 4 A_2 A_0 A_{1/2} \sin \varphi_{12}] \equiv X_{5/2} = 0 \\
\frac{5}{2} k A_{5/2} + \frac{3}{4} [A_1^2 A_{1/2} \sin \varphi_5 - 2 A_1 A_2 A_{1/2} \sin \varphi_6 - 2 A_2 A_{5/2} A_3 \sin \varphi_{10} \\
+ 2 A_1 A_{1/2} A_3 \sin \varphi_4 + 4 A_0 A_{1/2} A_3 \cos \varphi_{13} - 4 A_2 A_0 A_{1/2} \cos \varphi_{12}] \equiv Y_{5/2} = 0 \\
P_{1/2} A_{1/2} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{5/2} \cos \varphi_5 - 2 A_2 A_{1/2} A_3 \cos \varphi_{11} - 2 A_1 A_2 A_{1/2} \cos \varphi_3 + 2 A_1 A_{5/2} A_3 \cos \varphi_4 \\
+ 2 A_1 A_2 A_{5/2} \cos \varphi_6 + 4 A_0 A_{5/2} A_3 \sin \varphi_{13} + 4 A_1 A_0 A_{1/2} \sin \varphi_7 - 4 A_2 A_0 A_{5/2} \sin \varphi_{12}] \equiv X_{1/2} = 0 \\
\frac{1}{2} k A_{1/2} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{5/2} \sin \varphi_5 - 2 A_2 A_{1/2} A_3 \sin \varphi_{11} - 2 A_1 A_2 A_{1/2} \sin \varphi_3 - 2 A_1 A_{5/2} A_3 \sin \varphi_4 \\
- 2 A_1 A_2 A_{5/2} \sin \varphi_6 + 4 A_0 A_{5/2} A_3 \cos \varphi_{13} + 4 A_1 A_0 A_{1/2} \cos \varphi_7 + 4 A_2 A_0 A_{5/2} \cos \varphi_{12}] \equiv Y_{1/2} = 0 \\
P_3 A_3 + \frac{3}{4} [-\frac{1}{3} A_1^3 \cos \varphi_2 + A_2 A_{5/2}^2 \cos \varphi_{10} - A_2 A_{1/2}^2 \cos \varphi_{11} + A_1 A_2^2 \cos \varphi_1 \\
+ 2 A_1 A_{5/2} A_{1/2} \cos \varphi_4 + 4 A_0 A_{5/2} A_{1/2} \sin \varphi_{13} - 4 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi_9] \equiv X_3 = 0 \\
3 k A_3 + \frac{3}{4} [\frac{1}{3} A_1^3 \sin \varphi_2 + A_2 A_{5/2}^2 \sin \varphi_{10} + A_2 A_{1/2}^2 \sin \varphi_{11} + A_1 A_2^2 \sin \varphi_1 \\
- 2 A_1 A_{5/2} A_{1/2} \sin \varphi_4 - 4 A_0 A_{5/2} A_{1/2} \cos \varphi_{13} - 4 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi_9] \equiv Y_3 = 0
\end{aligned} \tag{1.142}$$

ここに

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_2^2 + A_{5/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - m \\
P_2 &= \frac{3}{4} A_2^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{5/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - 4 m \\
P_0 &= A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_{5/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_3^2) \\
P_{5/2} &= \frac{3}{4} A_{5/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_{1/2}^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - \frac{25}{4} m \\
P_{1/2} &= \frac{3}{4} A_{1/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_{5/2}^2 + A_3^2) + 3 A_0^2 - \frac{1}{4} m \\
P_3 &= \frac{3}{4} A_3^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_{5/2}^2 + A_{1/2}^2) + 3 A_0^2 - 9 m
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, & \varphi_2 = -3\alpha_1 + \alpha_3 \\
\varphi_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_{1/2}, & \varphi_4 = -\alpha_1 - \alpha_{5/2} + \alpha_{1/2} + \alpha_3 \\
\varphi_5 = -2\alpha_1 + \alpha_{5/2} - \alpha_{1/2}, & \varphi_6 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_{5/2} + \alpha_{1/2} \\
\varphi_7 = -\alpha_1 + 2\alpha_{1/2}, & \varphi_8 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \\
\varphi_9 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, & \varphi_{10} = -\alpha_2 + 2\alpha_{5/2} - \alpha_3 \\
\varphi_{11} = -\alpha_2 - 2\alpha_{1/2} + \alpha_3, & \varphi_{12} = -\alpha_2 + \alpha_{5/2} - \alpha_{1/2} \\
\varphi_{13} = -\alpha_{5/2} + \alpha_{1/2} - \alpha_3
\end{array}$$

式 (1.142) より周期解 (1.141) の各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.141) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.141) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{12} \theta_n \cos \left(\frac{n}{2} \tau - \varepsilon_n \right) \right] \eta = 0 \quad (1.143)$$

ここに θ_0, θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 12$) は周期解 (1.141) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式は付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.143) の第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, \dots, 6$) における解を

$$\begin{aligned}
\eta(\tau) = e^{\mu\tau} & \left[a_{1/4} \sin \left(\frac{1}{4} \tau - \sigma_{1/4} \right) + a_{3/4} \sin \left(\frac{3}{4} \tau - \sigma_{3/4} \right) \right. \\
& + a_{5/4} \sin \left(\frac{5}{4} \tau - \sigma_{5/4} \right) + a_{7/4} \sin \left(\frac{7}{4} \tau - \sigma_{7/4} \right) \\
& \left. + a_{9/4} \sin \left(\frac{9}{4} \tau - \sigma_{9/4} \right) + a_{11/4} \sin \left(\frac{11}{4} \tau - \sigma_{11/4} \right) \right] \quad (1.144)
\end{aligned}$$

と仮定する。式 (1.144) を式 (1.143) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=6, n=4$ である。また第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 4, 5, 6$) における式 (1.143) の解を

$$\begin{aligned}
\eta(\tau) = e^{\mu\tau} & \left[a_0 + a_{1/2} \sin \left(\frac{1}{2} \tau - \sigma_{1/2} \right) + a_1 \sin \left(\tau - \sigma_1 \right) \right. \\
& \left. + a_2 \sin \left(2\tau - \sigma_2 \right) + a_{5/2} \sin \left(\frac{5}{2} \tau - \sigma_{5/2} \right) + a_3 \sin \left(3\tau - \sigma_3 \right) \right] \quad (1.145)
\end{aligned}$$

と仮定する。式 (1.145) の各周波数成分は周期解 (1.141) の各周波数成分に等しい。式 (1.145) を式 (1.143) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=6$, $n=4$ である。また行列式の第 6 行, 第 7 行, 第 6 列, および第 7 列を除く。

式 (1.41), 式 (1.144), および式 (1.145) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, \dots, 6$) における安定条件および第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 4, 5, 6$) における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Delta_1(\delta) > 0 \tag{1.146}$$

$$\Delta_2(\delta) > 0 \tag{1.147}$$

ただし 式 (1.76) および式 (1.78) において $m=6$, $n=4$ とする。また式 (1.78) における行列式の第 6 行, 第 7 行, 第 6 列, および第 7 列を除く。

数値例

式 (1.141) の振幅特性を式 (1.142) より求め、その結果を図 1.17 に示す。系のパラメタは

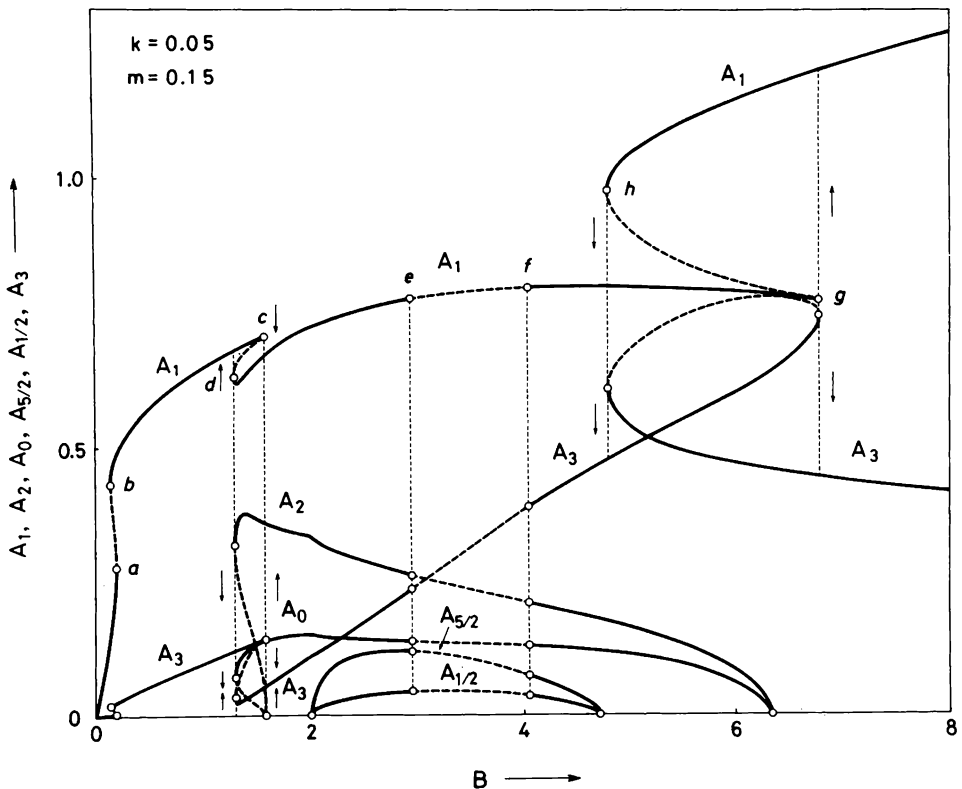


図 1.17 第 2 高調波振動, $\frac{5}{2}$ 調波振動, および第 3 高調波振動の振幅特性。

$$k = 0.05, \quad m = 0.15 \quad (1.148)$$

である。第 1.12(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。基本調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分、破線 cd の部分、および破線 gh の部分では安定条件式 (1.147) が満たされない。従って周期解 (1.141) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.141) が不安定となる。また破線 ef の部分では安定条件式 (1.146) が満たされない。従って $(2n-1)/4$ 調波成分 ($n=1, 2, \dots, 6$) を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.141) が不安定となる。なお $\frac{1}{4}$ 調波振動については第 3.8(b) 節で考察する。

1.13 $\frac{1}{3}$ 調波振動 ^[20]

この節では $\frac{1}{3}$ 調波解を求め、その安定性を吟味する。周波数 ν を $\frac{1}{3}$ とすると近似解 (1.14) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{\frac{1}{3}}\right) + A_{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{\frac{1}{3}}\right) \quad (1.149)$$

となる。第 1.4(b) 節において調波解析法を適用して式 (1.149) の各振幅および位相角について式 (1.32) を得た。式 (1.32) より周期解 (1.149) の各振幅および位相角を求め、文献 [1] から従って周期解 (1.149) の安定性を吟味した。^[10] しかし周期解が式 (1.149) の程度の近似では実験結果に対応する妥当な結果が得られなかった。この節では高次の近似解を求め、その安定性を吟味する。

(a) 周期解

外力の振幅 B が大きく、解に第 3 高調波成分が顕著に現われる場合には、式 (1.6) の解を式 (1.15) のように仮定した。周波数 ν を $\frac{1}{3}$ とすると式 (1.15) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{\frac{1}{3}}\right) + A_{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \alpha_{\frac{1}{3}}\right) + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) \quad (1.150)$$

となる。^{*} 調波解析法により周期解 (1.150) の各振幅および位相角を決定するために、式 (1.150) を式 (1.6) に代入し、周波数 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, および 3 の周波数成分を含む三角関数 \sin および \cos の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

^{*} 式 (1.150) の各周波数成分は周波数 ν が $\frac{1}{3}$ および 3 の場合の第 2 次近似解 (1.14) の各周波数成分に等しい。

$$\begin{aligned}
& P_1 A_1 + \frac{3}{4} [-2 A_1 A_{7/3} A_{1/3} \cos \varphi_1 - A_1^2 A_3 \cos \varphi_2 \\
& \quad + 2 A_{7/3} A_{1/3} A_3 \cos \varphi_3 - \frac{1}{3} A_{1/3}^3 \cos \varphi_4] - B_m m \sin \alpha_1 = 0 \\
& k A_1 + \frac{3}{4} [2 A_1 A_{7/3} A_{1/3} \sin \varphi_1 - A_1^2 A_3 \sin \varphi_2 \\
& \quad + 2 A_{7/3} A_{1/3} A_3 \sin \varphi_3 + \frac{1}{3} A_{1/3}^3 \sin \varphi_4] - B_m m \cos \alpha_1 = 0 \\
& P_{7/3} A_{7/3} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{1/3} \cos \varphi_1 + 2 A_1 A_{1/3} A_3 \cos \varphi_3 - A_{1/3}^2 A_3 \cos \varphi_5] = 0 \\
& \frac{7}{3} k A_{7/3} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{1/3} \sin \varphi_1 + 2 A_1 A_{1/3} A_3 \sin \varphi_3 - A_{1/3}^2 A_3 \sin \varphi_5] = 0 \\
& P_{1/3} A_{1/3} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{7/3} \cos \varphi_1 + 2 A_1 A_{7/3} A_3 \cos \varphi_3 + A_1 A_{1/3}^2 \cos \varphi_4] = 0 \\
& \frac{1}{3} k A_{1/3} + \frac{3}{4} [A_1^2 A_{7/3} \sin \varphi_1 - 2 A_1 A_{7/3} A_3 \sin \varphi_3 - A_1 A_{1/3}^2 \sin \varphi_4] = 0 \\
& P_3 A_3 + \frac{3}{4} [-\frac{1}{3} A_1^3 \cos \varphi_2 + 2 A_1 A_{7/3} A_{1/3} \cos \varphi_3 - A_{7/3} A_{1/3}^2 \cos \varphi_5] = 0 \\
& 3 k A_3 + \frac{3}{4} [\frac{1}{3} A_1^3 \sin \varphi_2 - 2 A_1 A_{7/3} A_{1/3} \sin \varphi_3 + A_{7/3} A_{1/3}^2 \sin \varphi_5] = 0
\end{aligned} \tag{1.151}$$

ここに

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{7/3}^2 + A_{1/3}^2 + A_3^2) - m \\
P_{7/3} &= \frac{3}{4} A_{7/3}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/3}^2 + A_3^2) - \frac{49}{9} m \\
P_{1/3} &= \frac{3}{4} A_{1/3}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{7/3}^2 + A_3^2) - \frac{1}{9} m \\
P_3 &= \frac{3}{4} A_3^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{7/3}^2 + A_{1/3}^2) - 9 m \\
\varphi_1 &= 2\alpha_1 - \alpha_{7/3} + \alpha_{1/3}, & \varphi_2 &= \alpha_3 - 3\alpha_1 \\
\varphi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2, & \varphi_4 &= \alpha_1 - 3\alpha_{1/3} \\
\varphi_5 &= -\alpha_{7/3} - 2\alpha_{1/3} + \alpha_3
\end{aligned}$$

式 (1.151) より周期解 (1.150) の各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.150) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求め

られているから、式(1.150)を式(1.42)に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^9 \theta_n \cos\left(\frac{2}{3}n\tau - \epsilon_n\right) \right] \eta = 0 \quad (1.152)$$

ここに θ_0, θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 9$) は周期解(1.150)の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献[1]に従って式(1.152)の第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 4, 5,$) における解を

$$\begin{aligned} \eta(\tau) = e^{\mu\tau} & \left[a_{1/3} \sin\left(\frac{1}{3}\tau - \sigma_{1/3}\right) + a_1 \sin(\tau - \sigma_1) \right. \\ & \left. + a_{7/3} \sin\left(\frac{7}{3}\tau - \sigma_{7/3}\right) + a_3 \sin(3\tau - \sigma_3) \right] \end{aligned} \quad (1.153)$$

と仮定する。式(1.153)の各周波数成分は周期解(1.150)の各周波数成分に等しい。式(1.153)を式(1.152)に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式(1.76)を得る。ただし式(1.76)において $m=5, n=3$ である。また行列式の第5行、第6行、第5列、および第6列を除く。

第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 3, 4$) における式(1.152)の解を

$$\begin{aligned} \eta(\tau) = e^{\mu\tau} & \left[a_0 + a_{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\tau - \sigma_{2/3}\right) \right. \\ & \left. + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2) + a_{8/3} \sin\left(\frac{8}{3}\tau - \sigma_{8/3}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.154)$$

と仮定する。式(1.154)を式(1.152)に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式(1.78)を得る。ただし式(1.78)において $m=4, n=3$ である。また行列式の第4行、第5行、第4列、および第5列を除く。

式(1.41), 式(1.153), および式(1.154)より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式(1.76)および式(1.78)を用いて第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 4, 5$) における安定条件および第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 3, 4$) における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.155)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.156)$$

ただし 式(1.76)において $m=5, n=3$ とし、式(1.78)において $m=4, n=3$ とする。

数値例

式(1.150)の振幅特性を式(1.151)より求め、その結果を図 1.18 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.2 \quad m = 1.0 \quad (1.157)$$

である。第 1.13(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。 $\frac{1}{3}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分では周期解 (1.150) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.150) が不安定となる。また破線 cd の部分では直流成分、 $\frac{1}{3}$ 調波成分、第 2 高調波成分、および $\frac{1}{3}$ 調波成分を持つ振動が励起することにより周期解 (1.150) が不安定となる。

パラメタ B および k を変えて $\frac{1}{3}$ 調波解が安定に存在する領域を求めると、図 1.19 の斜線を施した部分となる。領域の内側の空白部分では直流分、 $\frac{1}{3}$ 調波成分、第 2 高調波成分、および $\frac{1}{3}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより、 $\frac{1}{3}$ 調波解は不安定となる。

計算機^{*}を用いて基礎方程式 (1.6) の定常解を求め、それをフーリエ級数に展開して各周波数成分の振幅を得た。その結果を図 1.20 に示す。主要周波数成分は式 (1.150) の周波数成分と一致することが判る。なお $\frac{1}{3}$ 調波解と第 3 高調波解の振幅特性を図 1.21 に示す。外力の振幅 B を増加するにつれて振動振幅の平均値が大きくなるので、固有周波数は高くなると考えられる。

(c) $\frac{1}{3}$ 調波振動

前節において $\frac{1}{3}$ 調波解の安定性を文献 [1] に従って考察した。その結果周期解に $\frac{1}{3}$ 調波

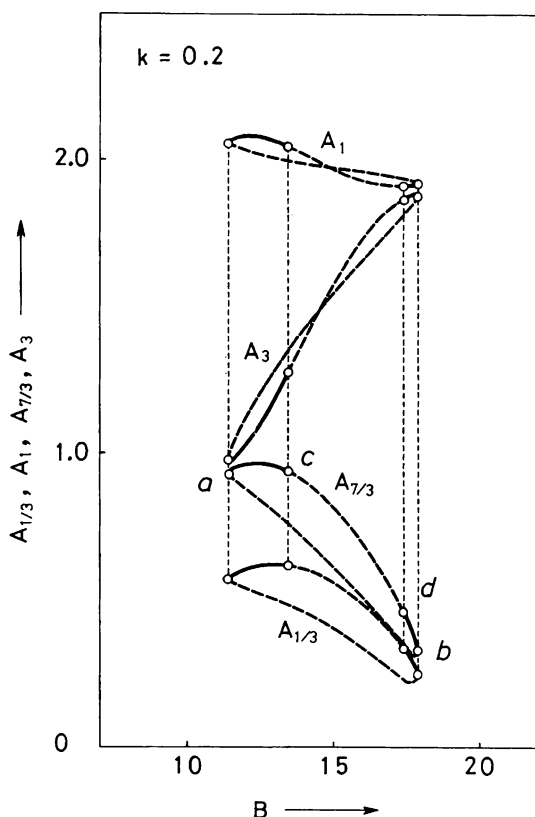


図 1.18 $\frac{1}{3}$ 調波振動の振幅特性。

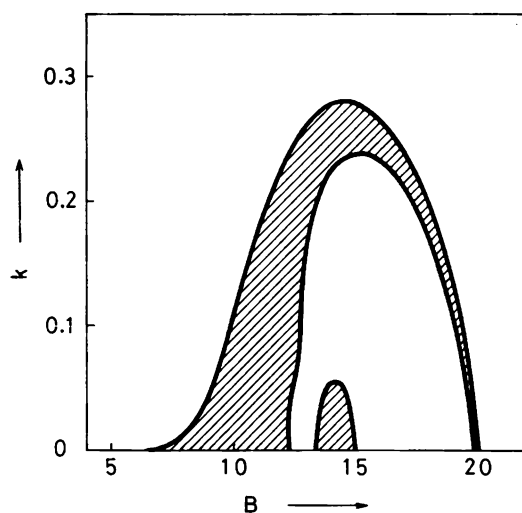


図 1.19 $\frac{1}{3}$ 調波振動の発生領域。

* KDC II (京都大学計算機 No. 2) を使用した。

成分および第3高調波成分が顕著に現われる場合に、直流分、 $\frac{2}{3}$ 調波成分、第2高調波成分、および $\frac{1}{3}$ 調波成分を持つ振動が励起する可能性があることが明らかとなった。図 1.18 において破線 cd の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて $\frac{1}{3}$ 調波成分は小さくなり、第3高調波成分が大きくなるから、固有周波数は $\frac{1}{3}$ と3の間にあると考えられる。

従って励起する振動の主要周波数成分は $\frac{1}{3}$ 調波成分であると考えられる。このことを確かめるために、基礎方程式(1.6)を計算機を用いて解き、定常解をフーリエ級数に展開した。その結果を図 1.22 に示す。系のパラメータは

$$k=0.2, m=1.0, B=10.5 \tag{1.158}$$

である。図 1.22 において新しく励起した $2\frac{2}{3}$ 調波成分 ($n=0, 1, 2, \dots$) を太線で示した。 $\frac{1}{3}$ 調波成分が顕著に現われ、 $\frac{1}{3}$ 調波振

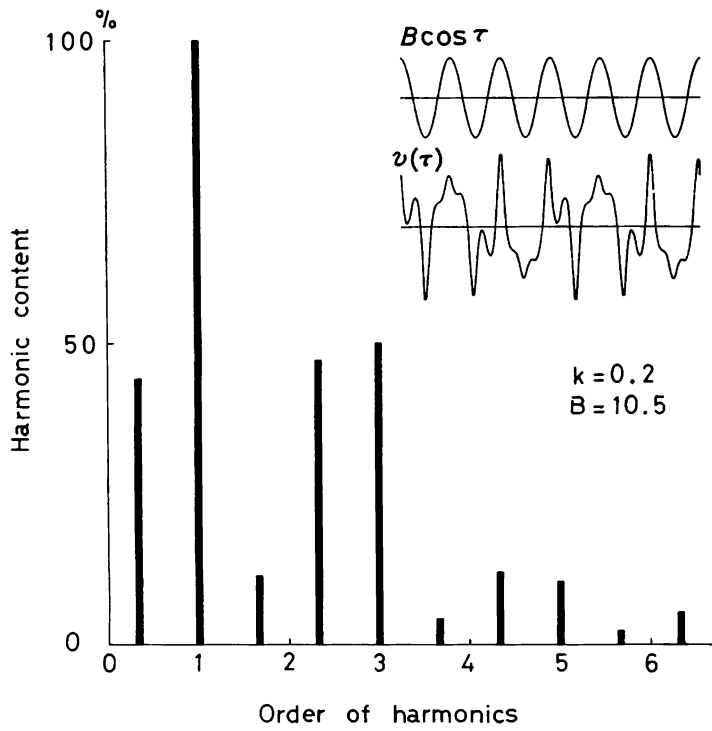


図 1.20 $\frac{1}{3}$ 調波周期解の調波解析 (基礎方程式(1.6)の解をフーリエ級数に展開したもの)。

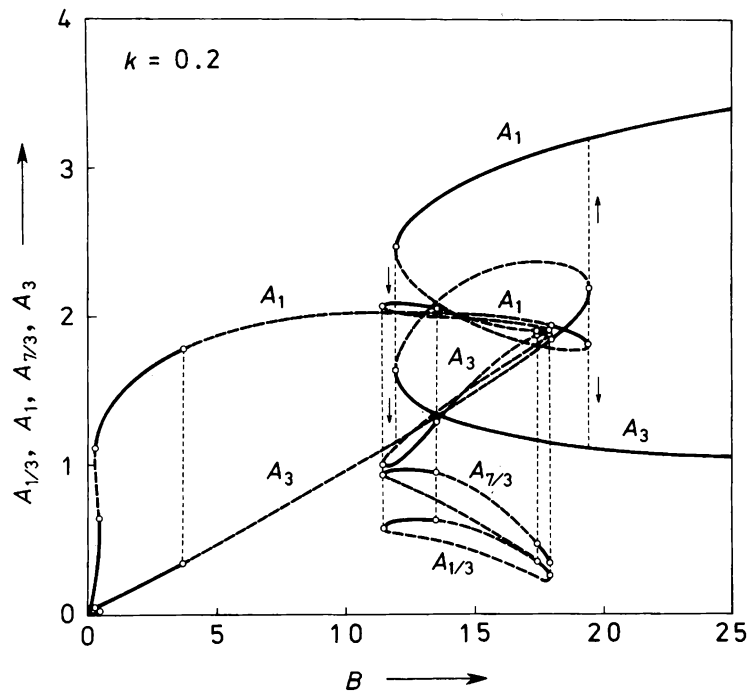


図 1.21 $\frac{1}{3}$ 調波振動および第3高調波振動の振幅特性。

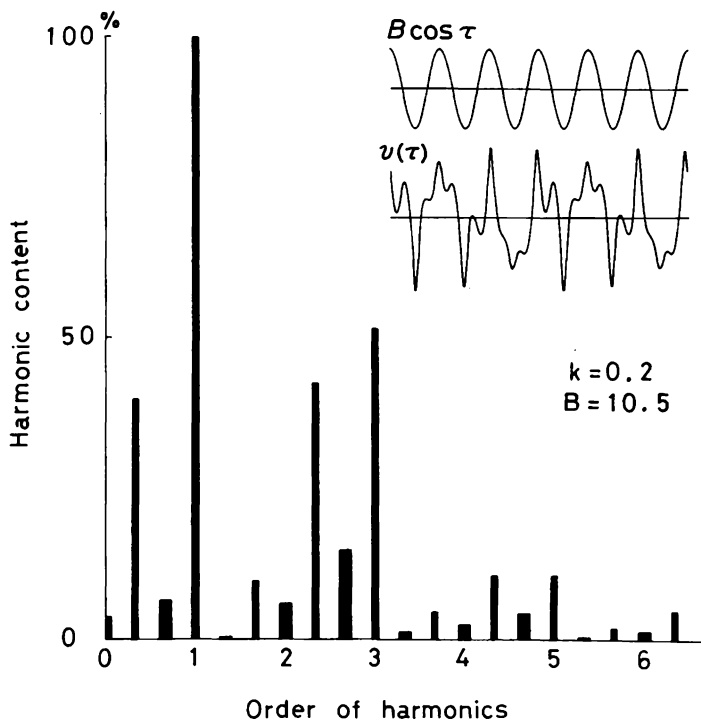


図 1.22 $2n\%$ 調波成分を含む解 ($\%$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (1.6) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

動が励起したと考えられる。なお新しく励起した周波数成分の内 $\%$ 調波成分が比較的大きい。固有周波数に近い周波数 ν を $\%$ とすると式 (1.15)における周波数 $|2-\nu|$ は $\%$ となる。

1.14 第5高調波振動

式 (1.6)において外力の振幅 B が大きい場合に第5高調波振動が発生する。この節では第5高調波解を求め、その安定性を吟味する。周波数 ν を5とすると、近似解 (1.14)あるいは (1.15) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) + A_5 \sin(5\tau + \alpha_5) \quad (1.159)$$

となる。

(a) 周期解

第 1.4 (b) 節で調波解析法を適用して式 (1.159) の各振幅および位相角について式 (1.33)を得た。式 (1.33)より周期解の各振幅および位相角を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

第 1.5(b) 節の考察に従って周期解 (1.159) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから、式 (1.159) を式 (1.42) に代入すると次のような Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^5 \theta_n \cos(2n\tau - \varepsilon_n) \right] \eta = 0 \quad (1.160)$$

ここに θ_0, θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 5$) は周期解 (1.159) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (1.160) の第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_1 \sin(\tau - \sigma_1) + a_3 \sin(3\tau - \sigma_3) + a_5 \sin(5\tau - \sigma_5) \right] \quad (1.161)$$

と仮定する。式 (1.161) の各周波数成分は周期解 (1.159) の各周波数成分に等しい。式 (1.161) を式 (1.160) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=3, n=1$ である。また第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における式 (1.160) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \left[a_0 + a_2 \sin(2\tau - \sigma_2) + a_4 \sin(4\tau - \sigma_4) \right] \quad (1.162)$$

と仮定する。式 (1.162) を式 (1.160) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=2, n=1$ である。

式 (1.41), 式 (1.161), および式 (1.162) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 1 次不安定領域, 第 3 次不安定領域, および第 5 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域および第 4 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (1.163)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (1.164)$$

ただし式 (1.76) において $m=3, n=1$ とし、式 (1.78) においては $m=2, n=1$ とする。

数値例

式 (1.159) の振幅特性を式 (1.33) より求め、その結果を図 1.23 に示す。系のパラメタは

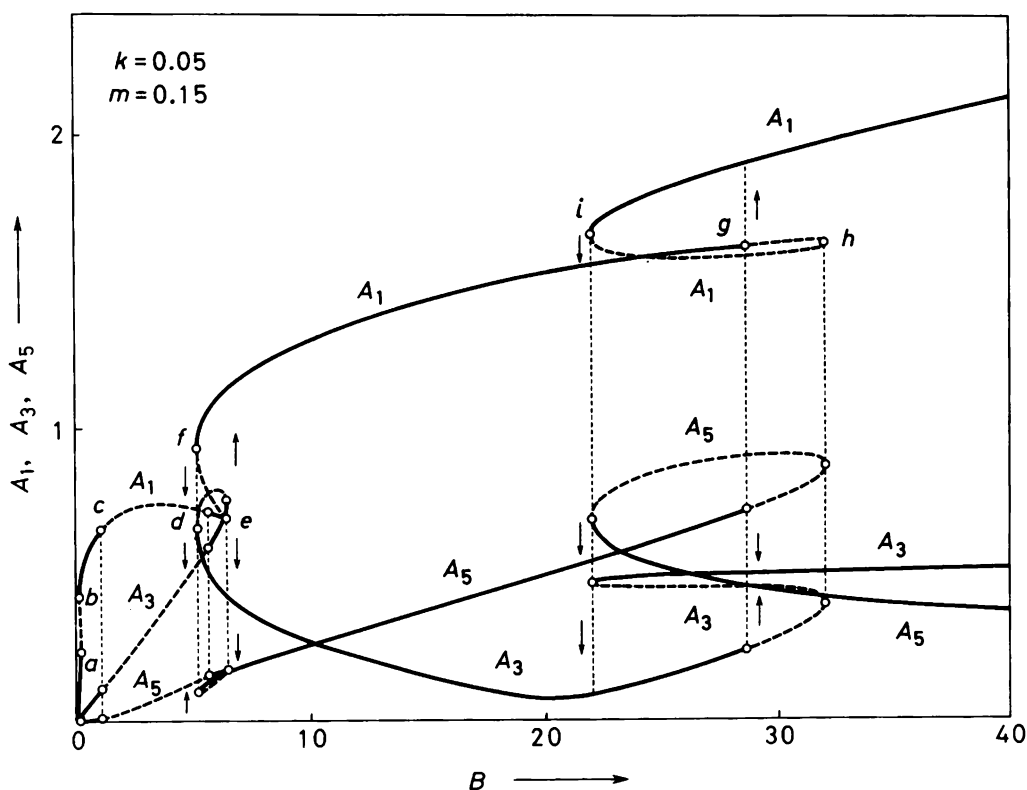


図 1.23 第 5 高調波振動の振幅特性。

$$k=0.05, \quad m=0.15 \quad (1.165)$$

である。第 1.14 (b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。基本調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分、破線 ef の部分、および破線 hi の部分では周期解 (1.159) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (1.159) は不安定となる。また破線 cd の部分および破線 gh の部分では第 2 高調波成分あるいは第 4 高調波成分を持つ振動^{*}が励起することにより周期解 (1.159) は不安定となる。

* 第 2 高調波振動については既に第 1.11 節で考察した。

第 2 章 直列共振回路に発生する振動の実験的考察

2.1 緒 言

この章では可飽和鉄心を持つ直列共振回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する強制振動について実験的考察を行なう。

直列共振回路に適当な初期条件の下に交番電圧を印加すると、電源周波数と同一周波数の成分を顕著に持つ基本調波振動以外に、高調波振動、あるいは分数調波振動の発生することが知られている。^[1, 2, 15, 16, 19, 21] 文献 [1] で論じられているように林千博教授の方法により周期解の安定性を考察すると、これらの周期振動を不安定にする振動の周波数成分が判ると共に新しく励起する振動を予知することができる。例えば第 3 高調波振動は第 2 高調波振動が励起することにより不安定となる場合があり、第 2 高調波振動が励起することが判っていた。さらに第 2 高調波成分および第 3 高調波成分を顕著に含む振動は $\frac{n}{2}$ 調波成分 ($n = 1, 2, \dots$) を持つ振動が励起することにより不安定となることが推測され、実験結果によれば第 2 高調波振動が不安定となって $\frac{n}{2}$ 調波成分 ($n = 1, 2, \dots$) を持つ振動の発生することが明らかになっていた。^[1] また 1966 年ころ林千博教授は、直列共振回路に振幅の比較的大きい電圧を印加すると、第 3 高調波成分を顕著に含む $\frac{n}{2}$ 調波成分 ($n = 1, 2, \dots$) を持つ振動の発生することを指摘された。当時、直列共振回路に発生する振動の主要周波数成分は外力の周波数を 1 とすれば、これと固有周波数^{*}に近い周波数 ν の成分であると考えていた。上記の $\frac{n}{2}$ 調波成分を持つ振動あるいは $\frac{n}{3}$ 調波成分を持つ振動は外力の振幅の比較的大きい範囲で発生し、第 2 高調波成分あるいは第 3 高調波成分を優勢に含むので、これらの振動の固有周波数は 2 あるいは 3 の付近にあると考えた。そこで電気回路で実験を行なった結果、これらの振動の主要周波数成分はそれぞれ $\frac{n}{2}$ 調波成分あるいは $\frac{n}{3}$ 調波成分であることが判った。

第 1.3 節では振動に含まれる主要周波数成分の決め方について考察し、^[4, 6] 一般的に定常解の主要周波数成分を定め、調波解析法を適用して各周期解を求めた。^[10] そこで本章では電気回路による実験を行ない、理論的に求めた周期解の存在を確かめ、その実験結果を解析結果と比較検討した。

* 固有周波数は共振回路の静電容量の大きさとリアクトルの等価的インダクタンスによって決まり、等価的インダクタンスは振動磁束の振幅に依存するものと考えられる。

2.2 実験回路

実験回路は図 2.1 に示す。実験結果と解析結果を比較するために、鉄心に空隙を設けたリアクトルと空隙のないリアクトルを直列に接続して、図 2.2 に示すような 3 次特性のリアクトルを合成した*。電源電圧の任意の位相において振動を開始させるために逆並列に接続したサイリスタを用いた**。また直流電源 E_0 を用いてコンデンサの初期充電電圧を与えた。

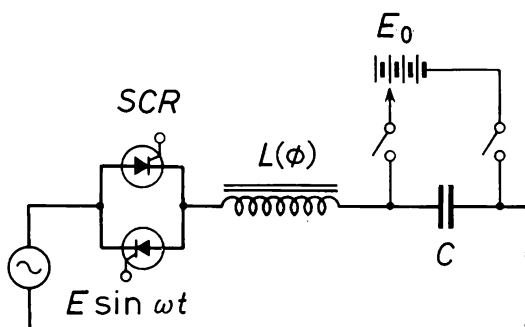


図 2.1 実験回路

2.3 振動の発生領域と周波数成分^[22]

図 2.1 に示す電気回路に発生する振動を調べ、各振動の周波数成分と第 1.3 節で考察した近似解の周波数成分を比較検討する。

初期条件として回路閉路時の電源電圧位相およびコンデンサの初期充電電圧を適当に与えると、直列共振回路に種々の振動が発生する。電源電圧の振幅およびコンデンサの容量を変えて各調波振動の発生領域を求めた。実験結果を図 2.3、図 2.4、および図 2.5 に示す。領域内の数字は振動の主

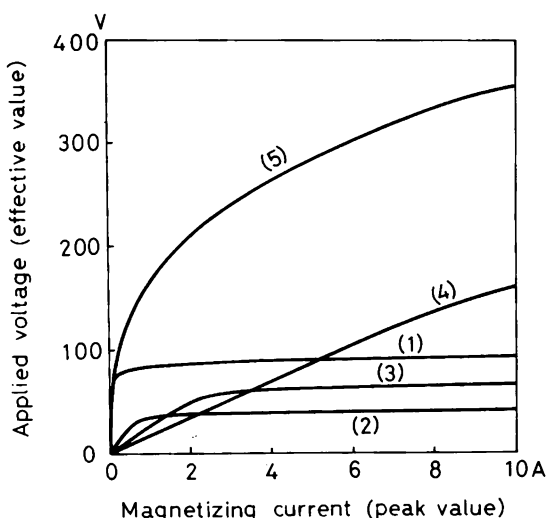


図 2.2 3 次特性に近似したリアクトルの特性。
(1): 空隙を有しないリアクトル。
(2),(3),(4): 空隙を有するリアクトル。
(5): (1),(2),(3) および (4) の合成特性。

要周波数成分を示す。 $\frac{1}{2}$ 調波振動および $\frac{1}{2}$ 調波振動の発生領域を図 2.3 に示す。また図 2.3 において $D1$ を記した領域では、初期条件によって基本調波の共振振動が発生する場合と非共振振動の発生する場合がある。図に示すように $\frac{1}{2}$ 調波振動は比較的狭い領域で存在し、発生領域の内側に $\frac{1}{2}$ 調波振動の発生しない部分がある。第 1.6 節の考察によれば、この領域では $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ不安定振動*** が励起することにより $\frac{1}{2}$ 調波振動が不安定となると考えられる。

$\frac{5}{2}$ 調波振動、第 2 高調波振動、および $\frac{5}{2}$ 調波振動の発生領域を図 2.4 に示す。図において 2、

* 文献 [1], p. 65 ~ p. 68 を参照した。さらに詳しいことは付録Ⅱで説明する。

** 制御回路の詳しいことは付録Ⅲで述べる。

*** $\frac{3}{4}$ 調波振動については第 3.5(b) 節あるいは第 4.3 節で述べる。

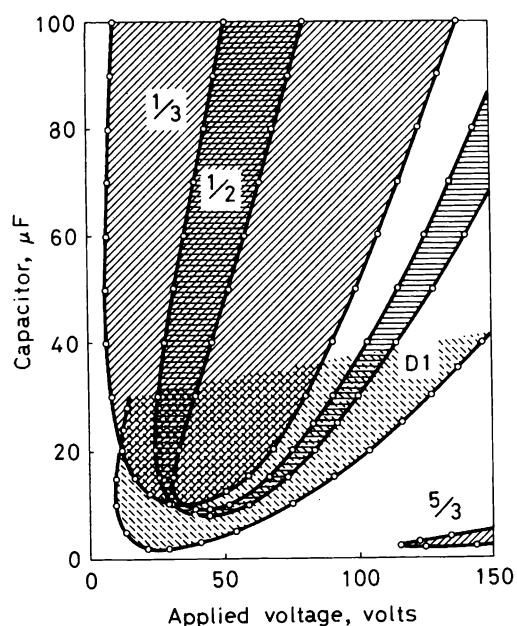


図 2.3 振動発生領域 ($\frac{1}{3}$ 調波振動, $\frac{1}{2}$ 調波振動, および $\frac{5}{3}$ 調波振動の発生領域, 初期条件により基本調波共振々動あるいは非共振々動の発生する領域)。

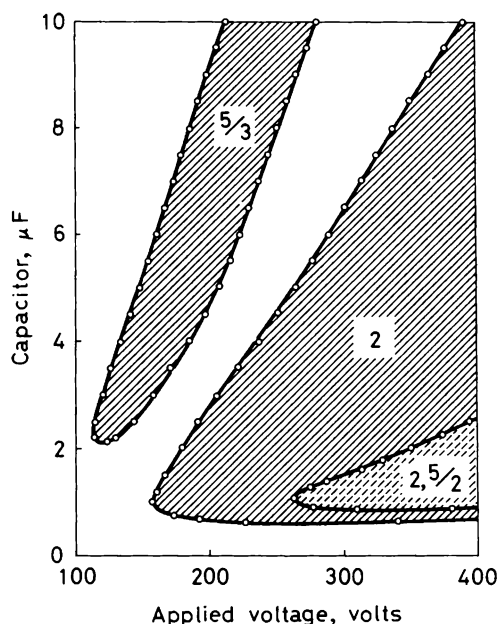


図 2.4 振動発生領域 ($\frac{5}{3}$ 調波振動, 第 2 高調波振動, および $\frac{5}{2}$ 調波振動の発生領域)。

$\frac{5}{2}$ と記した領域では $\frac{5}{2}$ 調波振動が励起することにより第 2 高調波振動は不安定となり, 第 2 高調波成分と $\frac{5}{2}$ 調波成分を顕著に持つ振動が発生する。

$\frac{7}{3}$ 調波振動の発生領域は図 2.5 に示す。第 1.13 節の考察によれば, 電源電圧の振幅を領域の境界線 ab の電圧より大きくすると, $\frac{5}{3}$ 調波成分, $\frac{7}{3}$ 調波成分, および $\frac{9}{3}$ 調波成分を持つ振動が励起することにより $\frac{7}{3}$ 調波振動が不安定になると考えられる。

直列共振回路に発生する振動の主要周波数成分は外力周波数の成分と共振回路の固有周波数に近い周波数の成分であると考えられる。コンデンサを小さくすると, 固有周波数は高くなり, また電源電圧の振幅を大きくするに

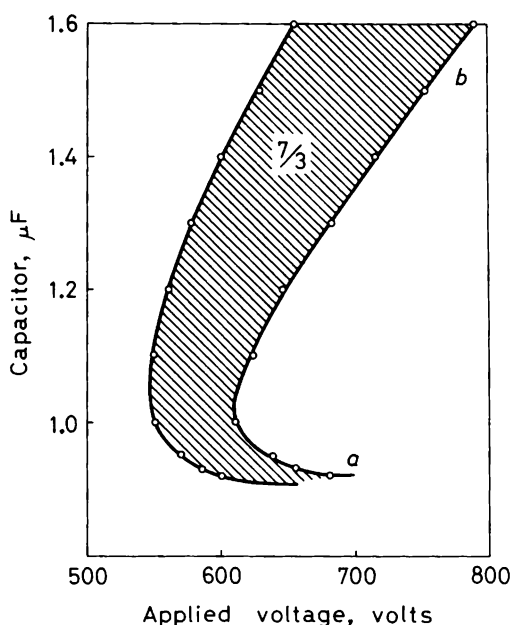


図 2.5 $\frac{7}{3}$ 調波振動の発生領域。

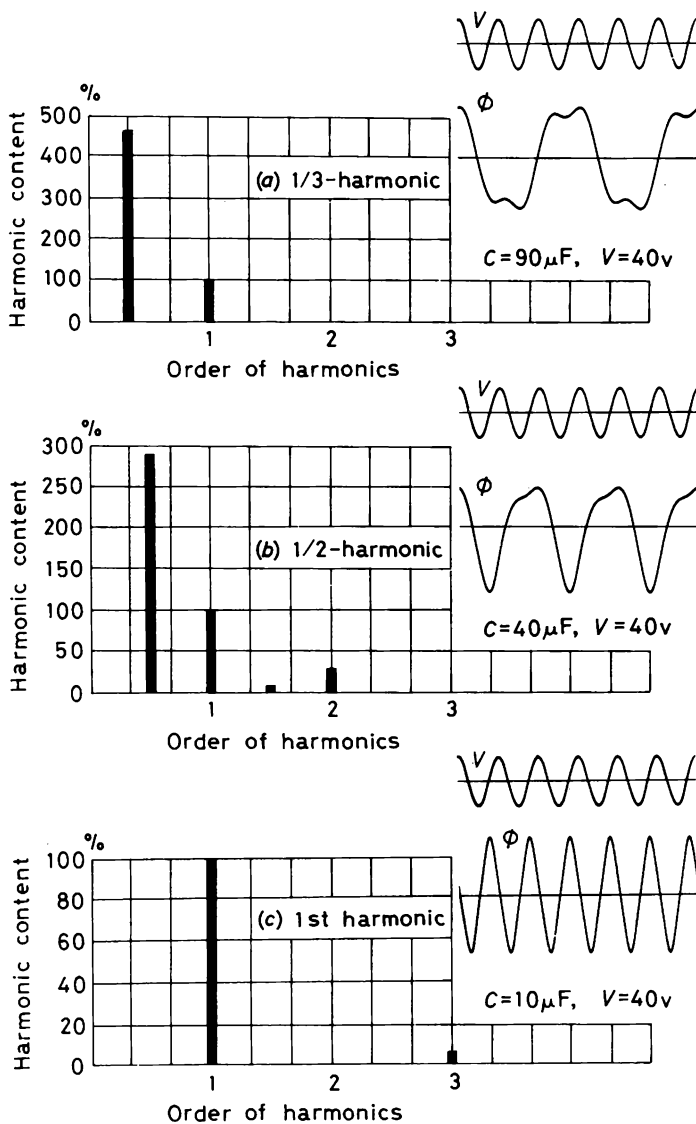


図 2.6 各振動磁束の調波解析 (電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの)。

つれて振動磁束の平均値は大きくなるので固有周波数は高くなると考えられる。

電源電圧 V および鉄心中の各振動磁束 ϕ の時間的変化を記録し、磁束をフーリエ級数に展開した^{*}。その結果を図 2.6, 図 2.7, および図 2.8 に示す。各振動磁束の主要周波数成分は電源周

* KDC II (京都大学計算機 No. 2) を用いて計算した。

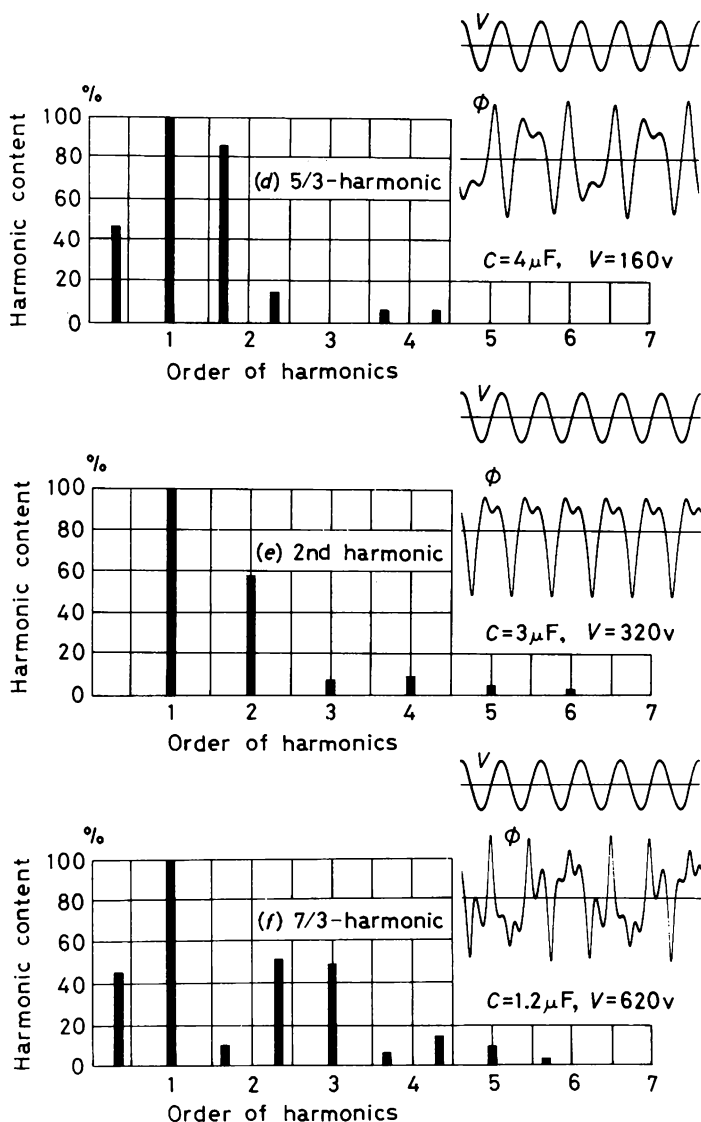


図 2.7 各振動磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束 Φ をフーリエ級数に展開したもの）。

波数を 1 とすれば、これと固有周波数に近い周波数 ν ，周波数 $|2-\nu|$ ， $|1-2\nu|$ ，および 3 の成分であって、式 (1.12) の周波数成分と概ね一致することが判る*。

* 周波数 $|2-\nu|$ ， $|1-2\nu|$ ，および周波数 3 の成分は可飽和リアクトルの 3 次特性によって電源周波数 1 および固有周波数に近い周波数 ν の成分と共存すると考えられる。

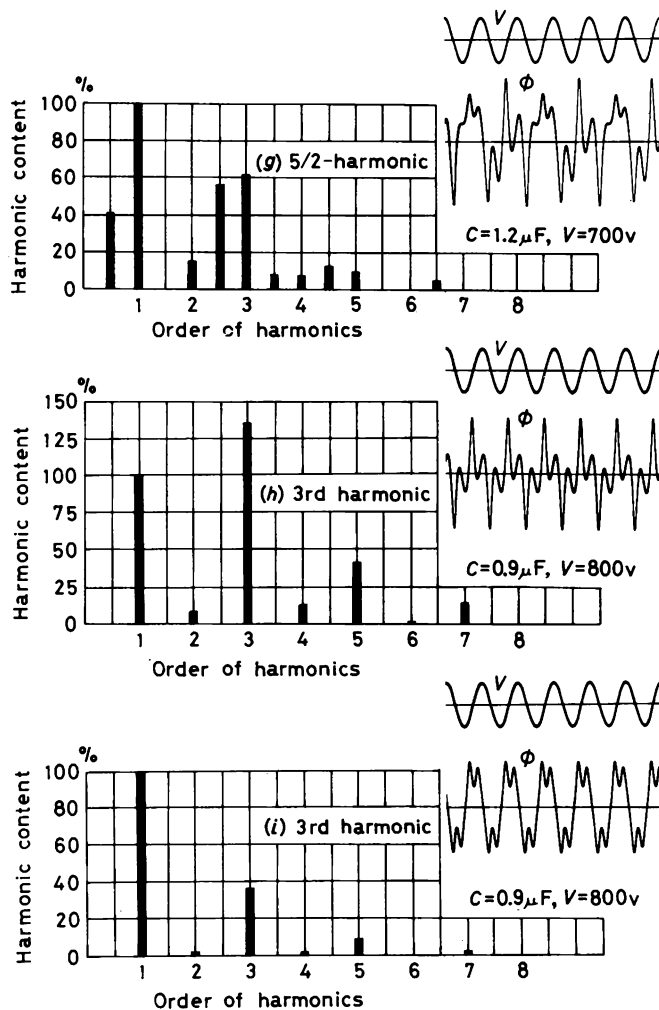


図 2.8 各振動磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの）。

2.4 理論的考察との比較^[8, 10]

図 2.2 に示したリアクトルの特性は、電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E と電流の波高値 I の関係で示すと次式で与えられる。

$$I = 0.778 E^3 \times 10^{-7} \quad [\text{A}] \quad (2.1)$$

コイルの巻数を n とすると鉄心中の磁束の振幅 Φ と電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E との間にはつぎの関係がある。

$$E = n\omega\Phi \quad (2.2)$$

式 (1.4), 式 (2.1), および式 (2.2) よりつぎの関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} n\omega\phi_n &= \sqrt{\omega C_n / (0.778 \times 10^{-3})} \quad [\text{V}] \\ I_n &= \sqrt{(\omega C_n)^3 / (0.778 \times 10^{-7})} \quad [\text{A}] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

実験において電源周波数は 60 [Hz] であり, $C_n = 10 [\mu\text{F}]$ とすると, 電圧および電流の単位量は次式で与えられる。

$$n\omega\phi_n = 220 \quad [\text{V}], \quad I_n = 0.830 \quad [\text{A}] \quad (2.4)$$

式 (2.4) を用いて解析結果と実験結果を定量的に比較する。

図 2.1 の実験回路において種々の大きさの電源電圧およびコンデンサの下に, 初期条件として回路閉路時の電源電圧位相およびコンデンサの初期充電電圧を適当に与えると共振回路に各種の振動が発生する。電源電圧の振幅を変化して振動の各周波数成分の振幅を求めた*。その結果を図 2.9, 図 2.10, および図 2.11 に示す。コンデンサの大きさはそれぞれ

$$\text{図 2.9} \quad : \quad m = 2.0 \quad (2.5)$$

$$\text{図 2.10} \quad : \quad m = 0.4 \quad (2.6)$$

$$\text{図 2.11} \quad : \quad m = 0.15 \quad (2.7)$$

である。図における数字は振動の各調波成分の調波を示す。

図 2.9 において $B = 0.214 \sim 0.491$ の範囲では $\frac{1}{2}$ 調波振動が発生しない。第 1.6 節の考察によれば, $\frac{3}{4}$ 調波成分を含む不安定振動が励起し $\frac{1}{2}$ 調波振動が不安定となると考えられる。この実験結果は図 1.2 および図 1.7 の解析結果に対応する。

図 2.10 に示すように, 適当な初期条件を与えると $\frac{5}{8}$ 調波振動が発生する。 $\frac{5}{8}$ 調波振動の主要周波数成分は周波数 1, $\frac{5}{8}$, および $\frac{1}{8}$ の成分であって, 式 (1.117) の周波数成分と一致する。この実験結果は図 1.14 および図 1.15 の解析結果に対応する。

図 2.11 において $B = 0.97$ で第 2 高調波振動が励起し, 第 3 高調波振動は不安定となる。^[1] この実験結果は図 1.3 および図 1.16 の解析結果に対応する。 $B = 0.97 \sim 1.76$ の範囲で第 2 高調波振動は安定であるが, $B = 1.76$ で $\frac{5}{2}$ 調波振動が励起することにより第 2 高調波振動は

* ヘテロダイン波形分析器を使用した。(付録Ⅳ参照)

不安定となる。 $\frac{5}{2}$ 調波振動は $B = 1.76 \sim 2.92$ の範囲で電源電圧に同期化するが、 $B = 2.92$ で $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{5}{2}$ 調波振動が不安定になると考えられる。これらの実験結果は図 1.16 および図 1.17 の解析結果に対応する。なお $\frac{1}{4}$ 調波振動は電源電圧の振幅の狭い範囲で電源電圧に同期しようとするが、不安定な振動であって同期化することが困難であると考えられる。破線の部分では電源電圧に同期化することが困難な振動が発生する。 $\frac{7}{3}$ 調波振動は $B = 3.82 \sim 4.64$ の範囲で電源電圧に同期化する。さらに $\frac{7}{3}$ 調波振動について考察するために、電源電圧 V および鉄心中の磁束 ϕ の時間変化を記録し、磁束を調波解析して各周波数成分の振幅を求めた。

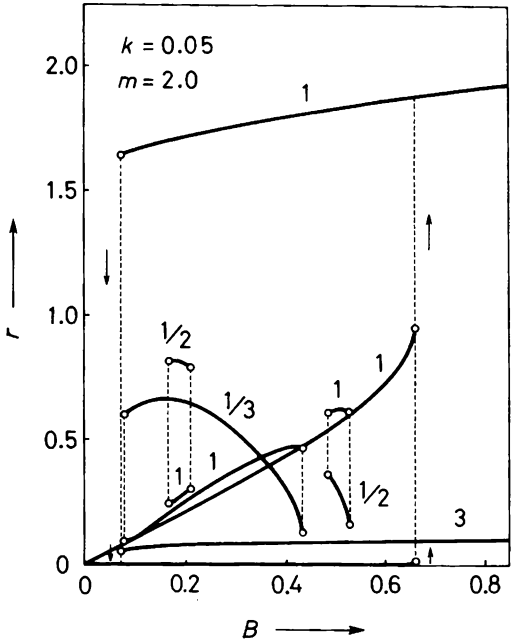


図 2.9 $\frac{1}{3}$ 調波振動， $\frac{1}{2}$ 調波振動，および基本調波振動の振幅特性。

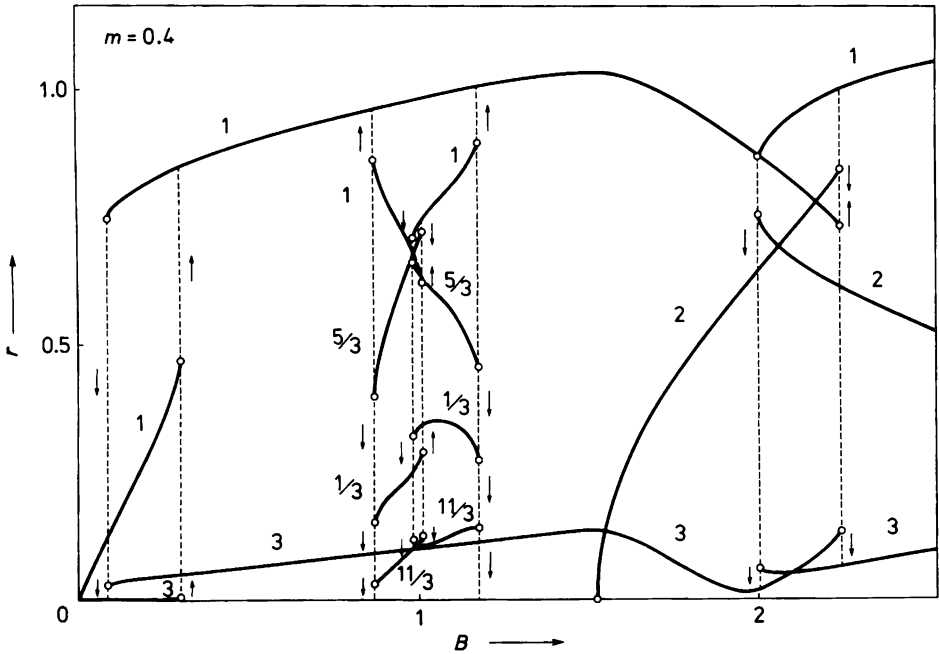


図 2.10 基本調波振動， $\frac{5}{3}$ 調波振動，および第 2 高調波振動の振幅特性。

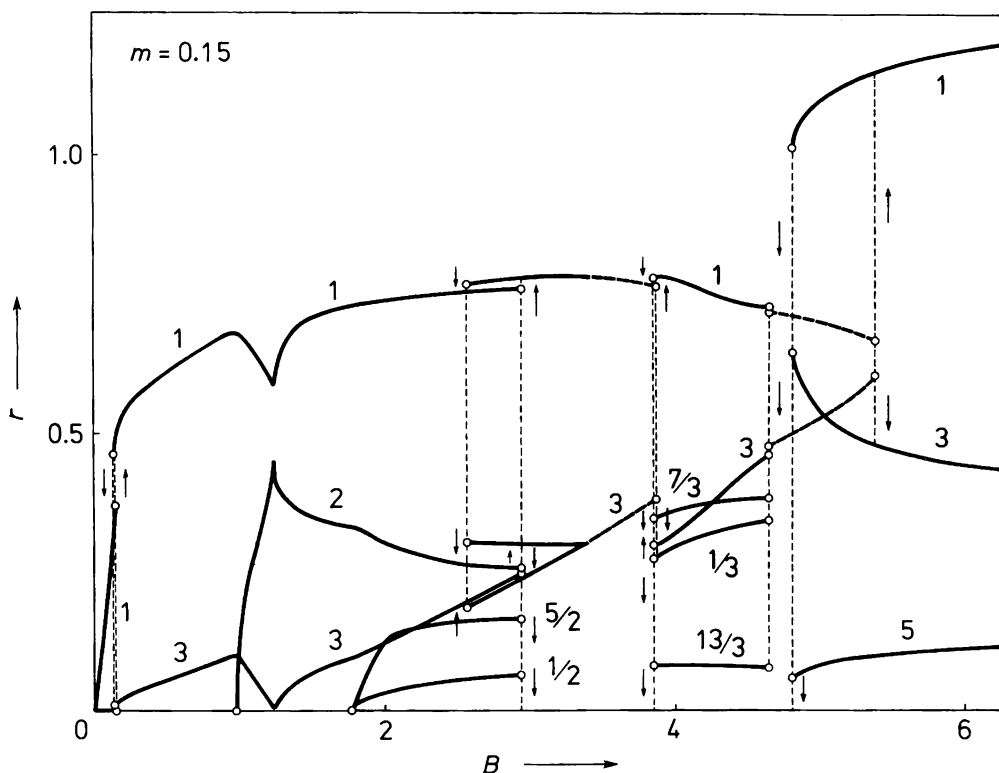


図 2.11 第 2 高調波振動, $\frac{1}{2}$ 調波振動, $\frac{1}{3}$ 調波振動, および第 3 高調波振動の振幅特性.

その結果を図 2.12 および図 2.13 に示す。解析結果と比較検討するために

$$C_n = 2.5 \text{ } [\mu\text{F}], \quad n\omega\phi_n = 110 \text{ } [\text{V}], \quad I_n = 0.104 \text{ } [\text{A}] \quad (2.8)$$

として系のパラメタをそれぞれ

$$\text{図 2.12:} \quad m = 1.0, \quad B = 10.2 \quad (2.9)$$

$$\text{図 2.13:} \quad m = 1.0, \quad B = 10.7 \quad (2.10)$$

とした。まず図 2.12 に示す実験結果は図 1.20 の解析結果に対応する。図 2.12 において主要周波数成分は式 (1.150) の周波数成分と一致することが判る。つぎに図 2.13 に示す実験結果は図 1.22 の解析結果に対応する。 $\frac{1}{3}$ 調波振動は $2\frac{2}{3}$ 調波成分 ($n = 1, 2, \dots$) を持つ振動が励起することにより不安定となることが判る。 $2\frac{2}{3}$ 調波成分の内特に $\frac{1}{3}$ 調波成分が優勢であり, $\frac{1}{3}$ 調波振動が励起したと考えられる。

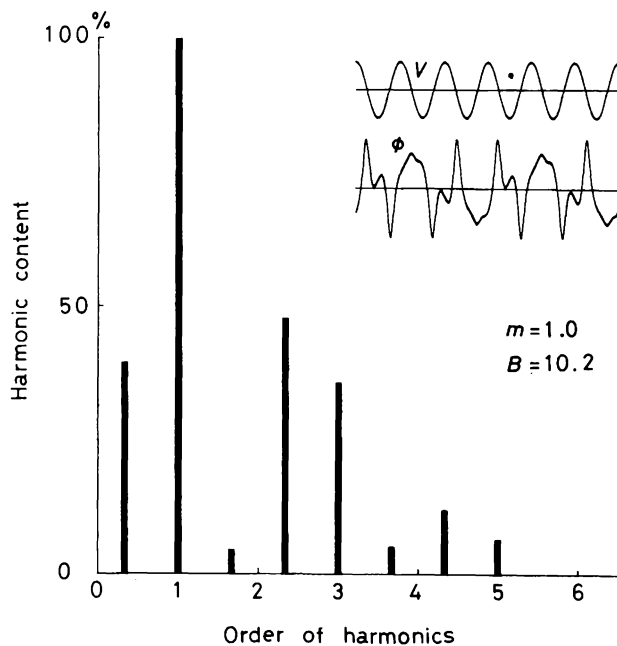


図 2.12 $\frac{1}{3}$ 調波振動磁束の調波解析 (電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの)。

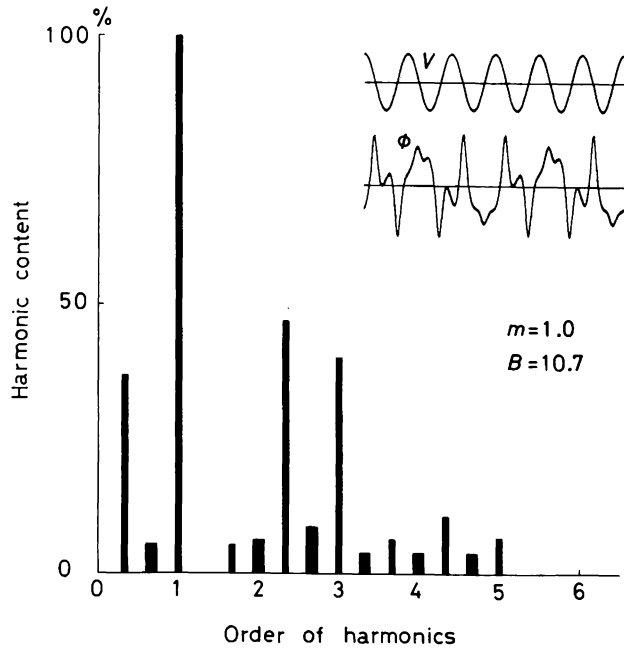


図 2.13 $\frac{2}{3}$ 調波成分を含む振動磁束 ($\frac{1}{3}$ 調波振動磁束) の調波解析 (電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの)。

第 3 章 外力に直流分を含む直列共振回路における 定常振動の理論的考察

3.1 緒 言

第 1 章において直列共振回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する定常振動について考察した。直列共振回路には外力周波数と簡単な整数比 (m/n) をなす周波数の成分を顕著に含む m/n 調波振動が発生することを示した。 m/n 調波振動の内、 m あるいは n の何れか一方が偶数である振動*は直流分を含むことが判った。従ってこれら偶数次調波振動は外力に直流分を含む場合に発生することが容易になると考えられる。この章では直列共振回路に正弦波電圧および直流電圧を印加した場合に発生する周期解を求め、その安定性を文献 [1] に従って吟味する。

3.2 基礎方程式

図 3.1 に示すように可飽和リアクトルを持つ直列共振回路に交番電圧 $E \sin \omega t$ を印加し、リアクトルの 2 次巻線には直流電流 i_0 を流して鉄心中の磁束が偏極した場合を考える。図に示した記号を用いると次の回路方程式を得る。

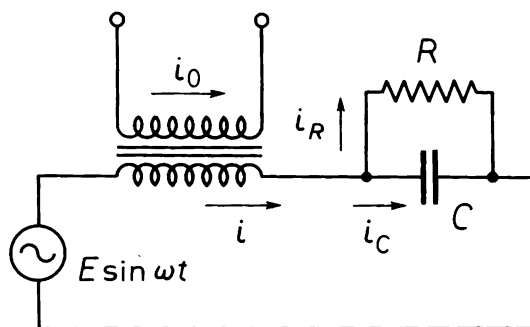


図 3.1 鉄心中の磁束を直流偏極したリアクトルを持つ振動回路。

* 第 1 章において $\frac{1}{2}$ 調波, $\frac{2}{3}$ 調波, $\frac{3}{2}$ 調波, 第 2 高調波, および $\frac{3}{2}$ 調波等の偶数次調波振動について考察した。

$$\left. \begin{aligned} n \frac{d\phi}{dt} + Ri_R &= E \sin \omega t \\ Ri_R &= \frac{1}{C} \int i_C dt \\ i &= i_R + i_C \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに n はリアクトルの 1 次巻線の巻数であり、2 次巻線も同巻数とする。また ϕ は鉄心中の磁束である。鉄心の磁化特性を次のように仮定する。^{*}

$$n(i + i_0) = a\phi^3 \quad (3.2)$$

ここに a は鉄心の磁化特性による定数である。電流、磁束、および容量を無次元化するために

$$i = I_n u, \quad i_0 = I_n u_0, \quad \phi = \Phi_n v, \quad C = C_n m \quad (3.3)$$

によって定義される u, u_0, v , および m を導入する。 I_n, Φ_n , および C_n は任意に選ぶことができるが、計算を簡単にするため

$$n\omega^2 C_n \Phi_n = I_n, \quad nI_n = a\Phi_n^3 \quad (3.4)$$

なる関係を設ける。式(3.2), 式(3.3), および式(3.4)を用いて式(3.1)を書き直せば、 v について次の基礎方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{m} v^3 &= B \sqrt{1 + (k/m)^2} \cos \tau + \frac{B_0}{m} \\ \tau &= \omega t - \tan^{-1} \left(\frac{k}{m} \right), \quad k = \frac{1}{\omega C_n R} \\ B &= \frac{E}{n\omega\Phi_n}, \quad B_0 = u_0 = \frac{i_0}{I_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここに

^{*} 実際には鉄心の磁化特性は $n(i + i_0) = a_1 \phi + a_3 \phi^3 + \dots + a_n \phi^n$ で表わされ、 n が 5 以上の高次の項 $a_n \phi^n$ を持つ場合があるが、計算の簡単のため磁化特性を式(3.2)のように 3 次特性と仮定した。実験では解析結果と比較するため 3 次特性のリアクトルを合成した。(第 4.2 節)

式(3.5)において外力は直流分 B_0 を持つ。

3.3 定常解の仮定

式(3.5)の解に含まれる主要周波数成分について考察する。まず、 $k=0$, $B=0$, および $B_0=0$ の場合、式(3.5)は

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{v^2}{m} = 0 \quad (3.6)$$

となる。 v の固有周波数を ν_0 とすると、 ν_0^2 は上式より v^2/m の平均値にほぼ等しいと考えられ、 v の第1次近似として次式を仮定する。

$$v = A_{\nu_0} \sin(\nu_0 \tau + \alpha_{\nu_0}) \quad (3.7)$$

つぎに k が比較的小さく B および B_0 が零でない場合には、解の主要周波数成分は外力周波数を1とすれば、これと固有周波数に近い周波数 ν^* の成分および直流分であると考え、第1次近似として次式を仮定する。

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu \tau + \alpha_\nu) + A_0 \quad (3.8)$$

式(3.5)を書き直すと

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = B_m \cos \tau + \frac{B_0}{m} - \frac{k}{m} \frac{dv}{d\tau} - \frac{1}{m} v^3 \quad (3.9)$$

$$B_m = B \sqrt{1 + (k/m)^2}$$

となる。式(3.8)を式(3.9)の右辺に代入すると次式を得る。^{**}

* 固有周波数 ν_0 が $m/n \pm \delta(m/n)$ (簡単な整数比、 δ : 小さい定数) のとき、振動が外力に引込まれて同期化した周期振動となり、主要成分の周波数 ν が m/n となる場合がある。例えば固有周波数 ν_0 が 0.3 であっても、振動が外力に同期化し主要成分の周波数が $1/3$ となることがある。なお第3章では周期振動についてだけ考察するが、式(3.5)において $k=0$ の場合には外力に同期化しない概周期振動が発生することがある。概周期振動の主要成分の周波数 ν は一般には外力周波数と無理数比をなす。^[2]

** 式(3.10)の右辺の直流項が零でなければ、式(3.5)の解は τ の項、すなわち $t \rightarrow \infty$ のとき無限に増大する項いわゆる永年項を含む。 v の周期性の条件より式(3.10)の直流項は零でなければならない。^[2, p.16] 例えば周波数 ν が $1/2$ のときには

$$[A_0^2 + \frac{3}{2}(A_1^2 + A_{1/2}^2)] A_0 + \frac{3}{4} A_1 A_{1/2}^2 \sin(\alpha_1 - 2\alpha_{1/2}) = B_0$$

でなければならない。上式は式(3.8)を式(3.5)に代入し、調波解析を行なっても得られる。(第3.5節)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v}{d\tau^2} = & B_m \cos \tau + \frac{B_0}{m} - \frac{k}{m} [A_1 \cos(\tau + \alpha_1) + \nu A_\nu \cos(\nu\tau + \alpha_\nu)] \\
& - \frac{1}{m} \left[\left(\frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_\nu^2 + 3 A_0^2 \right) A_1 \sin(\tau + \alpha_1) \right. \\
& + \left(\frac{3}{4} A_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_0^2 \right) A_1 \sin(\nu\tau + \alpha_\nu) \\
& - \frac{3}{4} A_1 A_\nu^2 \{ \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_1 - 2\alpha_\nu] + \sin[(1+2\nu)\tau + \alpha_1 + 2\alpha_\nu] \} \\
& + \frac{3}{4} A_1^2 A_\nu \{ \sin[(2-\nu)\tau + 2\alpha_1 - \alpha_\nu] - \sin[(2+\nu)\tau + 2\alpha_1 + \alpha_\nu] \} \\
& + 3 A_1 A_\nu A_0 \{ \cos[(1-\nu)\tau + \alpha_1 - \alpha_\nu] - \cos[(1+\nu)\tau + \alpha_1 + \alpha_\nu] \} \\
& - \frac{3}{2} A_1^2 A_0 \cos(2\tau + 2\alpha_1) - \frac{3}{2} A_\nu^2 A_0 \cos(2\nu\tau + 2\alpha_\nu) \\
& - \frac{1}{4} A_1^3 \sin(3\tau + 3\alpha_1) - \frac{1}{4} A_\nu^3 \sin(3\nu\tau + 3\alpha_\nu) \\
& \left. + \left(A_0^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + \frac{3}{2} A_\nu^2 \right) A_0 \right] \quad (3.10)
\end{aligned}$$

式(3.10)の両辺を積分すると v の周波数 $1, \nu$, および直流の成分以外の周波数成分が現われる。外力の直流分 B_0 が小さくなく、従って解の直流分 A_0 が大きい場合、解の各周波数成分の内振幅の比較的大きなもののみを考慮して、 v の第2次近似解を次のように仮定する。^{*}

$$\begin{aligned}
\nu \leq 1 : \quad v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu\tau + \alpha_\nu) \\
& + A_{1-2\nu} \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_{1-2\nu}] + A_0 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu > 1 : \quad v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu\tau + \alpha_\nu) \\
& + A_{2-\nu} \sin[(2-\nu)\tau + \alpha_{2-\nu}] + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

外力の振幅 B が大きく基本調波成分が大きくなる場合には第3高調波成分をも考慮して、 v の近似解を次のように仮定する。

^{*} 実験結果によれば、式(3.11)、式(3.12)、および式(3.13)の周波数成分が他の周波数成分に比較して優勢であることが観察された。

$$\begin{aligned} \nu > 1 : \quad v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_\nu \sin(\nu\tau + \alpha_\nu) + A_{2-\nu} \sin[(2-\nu)\tau + \alpha_{2-\nu}] \\ & + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) + A_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

外力の振幅 B が大きい場合には基本調波成分等の振幅が大きくなるので、周波数 ν は高くなる。外力に直流分を含まない場合には、外力の振幅 B を増加するにつれて基本調波以外に第 3 高調波などの奇数次調波成分が現われるが、外力に直流分を含む場合には、第 2 高調波成分が顕著に現われる。なお外力の直流分 B_0 が大なる場合には、式 (3.10) において第 2 高調波成分以外に周波数 $1-\nu$, 2ν 等の成分も大きくなると考えられる。

3.4 基本調波振動

この節では外力と同一周波数の成分を顕著に持つ基本調波解について考察する。周期解を調波解析法を適用して求め、その安定性を文献 [1] に従って吟味する。特に外力が直流分を持つ場合には $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより基本調波解が不安定となる場合のあることを説明する。

(a) 周期解

周波数 ν を 1 とすれば、式 (3.8) は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_0 \quad (3.14)$$

となる。調波解析法により周期解 (3.14) の各振幅および位相角を決定するために、式 (3.14) を式 (3.5) に代入し、周波数 1 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_1 A_1 - B_m m \sin \alpha_1 &= 0 \\ k A_1 - B_m m \cos \alpha_1 &= 0 \\ P_0 A_0 &= B_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + 3 A_0^2 - m, \quad P_0 = A_0^2 + \frac{3}{2} A_1^2$$

式 (3.15) より位相角 α_1 を消去すると次式を得る。

$$(P_1^2 + k^2) A_1^2 = B_m^2 m^2, \quad P_0 A_0 = B_0 \quad (3.16)$$

式 (3.16) より振幅 A_1 および A_0 を求めることができる。

(b) 周期解の安定性

文献 [1] に従って周期解 (3.14) の安定性を吟味するために、この周期解を $v_0(\tau)$ で表わし、それからの微小変分 $\xi(\tau)$ を考える。この変分 $\xi(\tau)$ が時間の経過と共に零に収束すれば周期解は安定であり、発散すれば周期解は不安定である。 $\xi(\tau)$ を

$$v(\tau) = v_0(\tau) + \xi(\tau) \quad (3.17)$$

によって定義する。式 (3.17) を式 (3.5) に代入して

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{m} v_0^2 \xi = 0 \quad (3.18)$$

なる変分方程式を得る。そこで

$$\xi(\tau) = e^{-\delta\tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (3.19)$$

なる変換を用いて式 (3.18) より次式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + (-\delta^2 + \frac{3}{m} v_0^2) \eta = 0 \quad (3.20)$$

周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められているから式 (3.14) を式 (3.20) に代入すると次の Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(n\tau - \epsilon_n) \right] \eta = 0$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + 2A_0^2) \\ \theta_n^2 &= \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, & \epsilon_n &= \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}} \\ \theta_{1s} &= \frac{3}{m} A_1 A_0 \cos \alpha_1, & \theta_{1c} &= \frac{3}{m} A_1 A_0 \sin \alpha_1 \\ \theta_{2s} &= \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1, & \theta_{2c} &= -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

文献 [1] に従って式 (3.21) の第 1 次不安定領域における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} a_{1/2} \sin(\frac{1}{2}\tau - \sigma_{1/2}) \quad (3.22)$$

と仮定する。式 (3.22) を式 (3.21) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

$$A_1(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 - (\frac{1}{2})^2 - \theta_{1c} & \theta_{1s} + 2(\frac{1}{2})\mu \\ \theta_{1s} + 2(\frac{1}{2})\mu & \theta_0 + \mu^2 - (\frac{1}{2})^2 + \theta_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

また第 2 次不安定領域における式 (3.21) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + a_1 \sin(\tau - \sigma_1)] \quad (3.24)$$

と仮定する。式 (3.24) の周波数成分は周期解 (3.14) の周波数成分に等しい。式 (3.24) を式 (3.21) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める次の式を得る。

$$A_2(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \theta_0 + \mu^2 & \theta_{1s} & \theta_{1c} \\ 2\theta_{1s} & \theta_0 + \mu^2 - 1 - \theta_{2c} & \theta_{2s} - 2\mu \\ 2\theta_{1c} & \theta_{2s} + 2\mu & \theta_0 + \mu^2 - 1 + \theta_{2c} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

式 (3.19), 式 (3.22), および式 (3.24) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って第 1 次不安定領域における安定条件および第 2 次不安定領域における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1(\delta) > 0 \quad (3.26)$$

$$A_2(\delta) > 0 \quad (3.27)$$

なお詳しくは省略するが、式 (3.15) の関係を用いると周期解 (3.14) の振幅特性曲線 (BA_1 および BA_0 の関係) が垂直接線を有する点は $A_2(\delta) = 0$ となる安定限界点と一致する。^[2, p. 105]

以上は第 1 次不安定領域および第 2 次不安定領域における安定性を考察した。一般には第 3 次不安定領域、第 4 次不安定領域、・・・における安定性を吟味しなければならないが、これは θ_0 が大きい範囲で問題となる。 θ_0 が大きいときには振幅 A_1 あるいは A_0 が大きく従って外力の振幅 B あるいは B_0 が大きい。このとき周期解 (3.14) には高調波成分が含まれなければならない。高調波解については第 3.6 節以降で考察する。

数値例

式(3.14)の振幅特性を式(3.16)より求め、その結果を図3.2に示す。系のパラメタは

$$k=0.05, \quad m=1.0, \quad B_0=0.07 \quad (3.28)$$

である。第3.4(b)節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。基本調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分では $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより周期解(3.14)が不安定となる。^{*}また破線 cd の部分では周期解(3.14)の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解(3.14)は不安定となる。

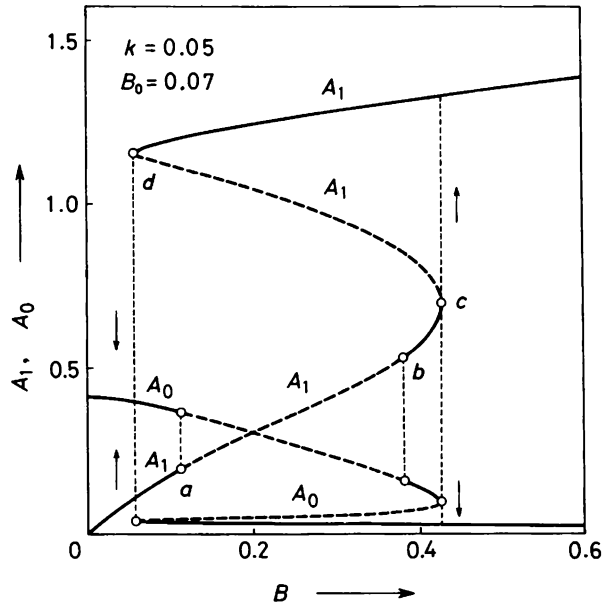


図 3.2 外力に直流成分を含む場合の基本調波振動の振幅特性。

3.5 $\frac{1}{2}$ 調波振動

前節において文献[1]の方法により基本調波解の安定性を吟味した結果、 $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより基本調波解が不安定となることが判った。そこでこの節では $\frac{1}{2}$ 調波解を求め、その安定性を吟味する。

(a) 周期解とその安定性

周波数 ν を $\frac{1}{2}$ とすれば、式(3.11)は

$$v = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{\frac{1}{2}} \sin(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{\frac{1}{2}}) + A_0 \quad (3.29)$$

となる。式(3.29)は外力に直流分を含まない場合の $\frac{1}{2}$ 調波解(1.71)の周波数成分と同一周波数成分を持つ。調波解析法により周期解(3.29)の各振幅および位相角を決定するために、

^{*}破線 ab の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて、解の直流分 A_0 は小さくなり、基本調波成分は大きくなるので固有周波数は零と1の間にあると考えられる。

式 (3.29) を式 (3.5) に代入し、周波数 1 および $\frac{1}{2}$ の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 A_1 - \frac{3}{2} A_{1/2}^2 A_0 \sin \varphi - B_m m \sin \alpha_1 &= 0, & k A_1 - \frac{3}{2} A_{1/2}^2 A_0 \cos \varphi - B_m m \cos \alpha_1 &= 0 \\
 P_{1/2} A_{1/2} - 3 A_1 A_{1/2} A_0 \sin \varphi &= 0, & \frac{1}{2} k A_{1/2} + 3 A_1 A_{1/2} A_0 \cos \varphi &= 0 \\
 P_0 A_0 - \frac{3}{4} A_1 A_{1/2}^2 \sin \varphi &= B_0, & & \\
 \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_{1/2}^2 + 3 A_0^2 - m, & P_{1/2} &= \frac{3}{4} A_{1/2}^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_0^2 - \frac{m}{4} \\
 P_0 &= A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/2}^2), & \varphi &= \alpha_1 - 2 \alpha_{1/2}
 \end{aligned} \right\}$$

式 (3.30) より位相角 α_1 および $\alpha_{1/2}$ を消去すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\left(P_1 - \frac{1}{2} P_{1/2} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{A_{1/2}^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 &= B_m^2 m^2 \\
 \frac{1}{4} k^2 + P_{1/2}^2 &= 9 A_1^2 A_0^2 \\
 4 P_0 A_0^2 - P_{1/2} A_{1/2}^2 &= 4 B_0 A_0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

式 (3.31) より振幅 A_1 , $A_{1/2}$, および A_0 を決定することができる。^{*}

文献 [1] に従って周期解 (3.29) の安定性を吟味するために、この周期解を $v_0(\tau)$ で表わし、それからの変分 $\xi(\tau)$ を考える。第 3.4 (b) 節と同様にして、変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{m} v_0^2 \xi = 0 \quad (3.32)$$

となる。

^{*} 計算機 (KDC II) を用い、ニュートン・ラプソン法により各振幅を求めた。初期値は実験結果を考慮して適当に与えた。

$$\xi(\tau) = e^{-\delta\tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (3.33)$$

なる変換を用い、周期解 (3.29) を式 (3.32) に代入すると、第 1.6(b) 節の Hill の方程式 (1.74) を得る。従って周期解 (3.29) の安定性を第 1.6(b) 節の考察に従って吟味することができる。

数値例

式 (3.29) の振幅特性を式 (3.31) より求め、その結果を図 3.3 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 1.0, \quad B_0 = 0.07 \quad (3.34)$$

である。 $\frac{1}{2}$ 調波解の存在する外力の振幅 B の範囲は図 3.2 において $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより基本調波解が不安定となる外力の振幅 B の範囲と一致する。第 1.6(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分では $\frac{1}{4}$ 調波成分および $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.29) が不安定となる。

$$k = 0.05, \quad m = 1.0, \quad B_0 = 0.03 \quad (3.35)$$

の場合の式 (3.29) の振幅特性を式 (3.31) より求め、その結果を図 3.4 に示す。第 1.6(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。 $\frac{1}{2}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分および破線 ef の部分では周期解 (3.29) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.29) が不安定となる。また破線 cd の部分および破線 gh の部分では何れも $\frac{1}{4}$ 調波成分および $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ不安定振動が励起することにより周期

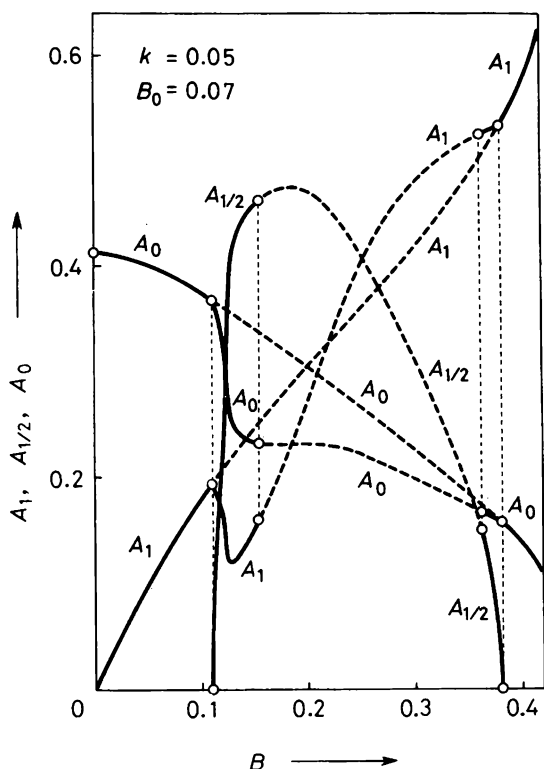


図 3.3 外力に直流成分を含む場合の $\frac{1}{2}$ 調波振動の振幅特性。

解 (3.29) が不安定となる。^{*}

② $\frac{1}{4}$ 調波振動および $\frac{3}{4}$ 調波振動

前節において $\frac{1}{2}$ 調波解の安定性を文献 [1] に従って考察した。その結果 $\frac{1}{4}$ 調波成分および $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ振動が励起することにより、 $\frac{1}{2}$ 調波解が不安定となる場合のあることが明らかとなった。なお図 3.4 において破線 $g h$ 部分の振動振幅の平均値は破線 $c d$ 部分のそれより大きいので、破線 $g h$ 部分の固有周波数は破線 $c d$ 部分の固有周波数より高いと考えられる。これらのことを確かめるため、基礎方程式 (3.5) を計算機を用いて解き、定常解をフーリエ級数に展開した。まず系のパラメータを

$$\begin{aligned} k &= 0.05, & m &= 1.0, \\ B_0 &= 0.03, & B &= 0.088 \end{aligned}$$

(3.36)

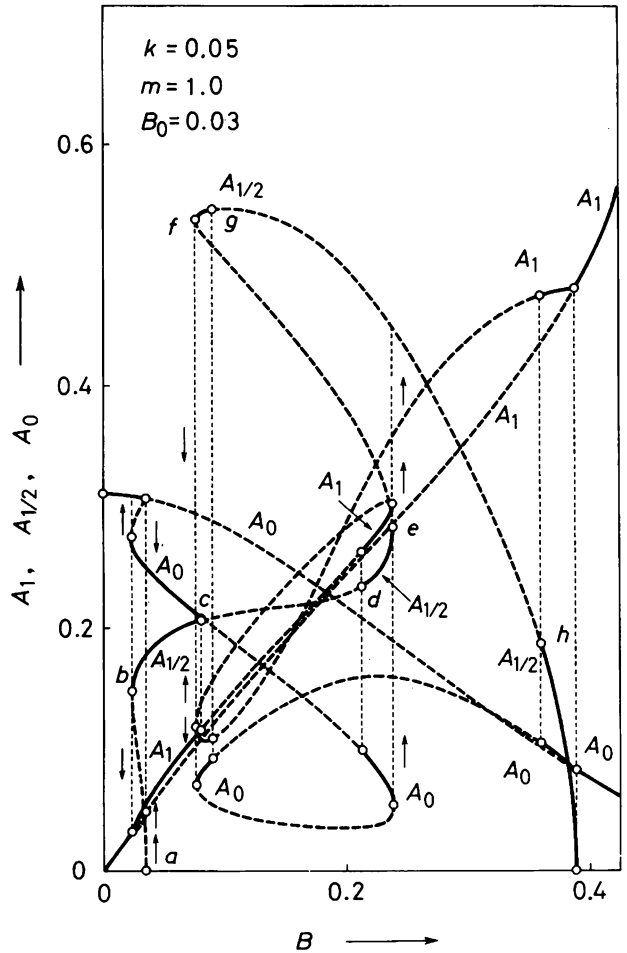


図 3.4 外力に直流成分を含む場合の $\frac{1}{2}$ 調波振動の振幅特性。

とし、 $\frac{1}{2}$ 調波成分の比較的小さい定常解とその各周波数成分の振幅を求

めた。その結果を図 3.5 に示す。図 3.5 において新しく励起した $\frac{1}{4}$ 調波成分 ($n=1, 3, 5, \dots$) を太線で示した。この周期解は $\frac{1}{4}$ 調波成分を顕著に含み、 $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。

^{*} 破線 $c d$ の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて解の直流分は小さくなり、 $\frac{1}{2}$ 調波成分は大きくなるから固有周波数は零と $\frac{1}{2}$ の間にあると考えられる。従って不安定振動の主要周波数成分は $\frac{1}{4}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起するものと推測される。また破線 $g h$ の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて $\frac{1}{2}$ 調波成分は小さくなり、基本調波成分は大きくなるので固有周波数は $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあるものと考えられる。従って不安定振動の主要周波数成分は $\frac{3}{4}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起するものと推測される。

つぎに系のパラメータを

$$k = 0.05, \quad m = 1.0, \quad B_0 = 0.03, \quad B = 0.116 \quad (3.37)$$

とし、 $\frac{1}{2}$ 調波成分の比較的大きい定常解とその各周波数成分の振幅を求めた。その結果を図3.6に示す。この周期解は $\frac{3}{4}$ 調波成分を顕著に含み、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。なお解には $\frac{1}{4}$ 調波成分が含まれている。周波数 ν を $\frac{3}{4}$ とすると、式(3.10)において $1-\nu$ は $\frac{1}{4}$ となる。

$\frac{1}{4}$ 調波振動あるいは $\frac{3}{4}$ 調波振動は外力の振幅 B の狭い範囲で安定に存在する。外力の振幅 B を増加することにより振動振幅の平均値が大きくなれば、周波数 ν が高くなると考えられる。図3.3に示すように振幅 B の増加と共に解の直流分が小さくなり、基本調波成分が大きくなる

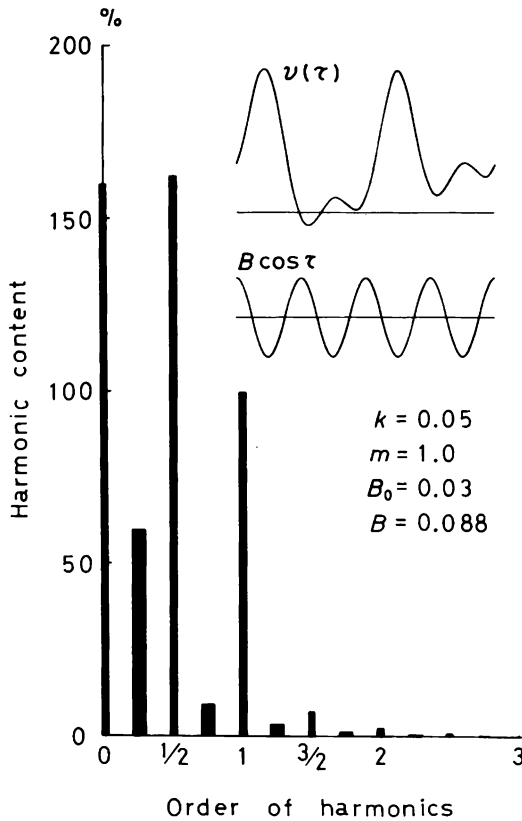


図 3.5 $\frac{1}{4}$ 調波成分を顕著に含む解 ($\frac{1}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

振幅 B の範囲で周波数 ν が $\frac{1}{2}$ (零と 1 の中間) の周波数成分が励起する。また図 3.3 あるいは図 3.4 において振幅 B の増加と共に $\frac{1}{2}$ 調波成分が小さくなり基本調波成分が大きくなる振幅 B の範囲で周波数 ν が $\frac{3}{4}$ ($\frac{1}{2}$ と 1 の中間) の周波数成分が励起し、 $\frac{1}{2}$ 調波振動が不安定となる。同様にして $\frac{3}{4}$ 調波振動は $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより不安定となると推測される。

3.6 第 2 高調波振動^[23]

この節では外力に直流分を含む場合の第 2 高調波解について考察する。周期解を調波解析法を用いて求め、その安定性を文献 [1] に従って吟味する。特に $\frac{1}{2}$ 調波成分 ($n = 1, 3, 5$) を持つ振動が励起することにより第 2 高調波解が不安定となる場合のあることを説明する。

(a) 外力の振幅が大きい場合の
 近似解

式 (3.5) において外力の振幅 B が大きい場合の第 2 高調波解について考察する。周波数 ν を 2 とすれば、式 (3.12) は

$$\nu = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \tag{3.38}$$

となる。調波解析法により周期解 (3.38) の各振幅および位相角を決定するために、式 (3.38) を式 (3.5) に代入し、周波数 1 および 2 の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

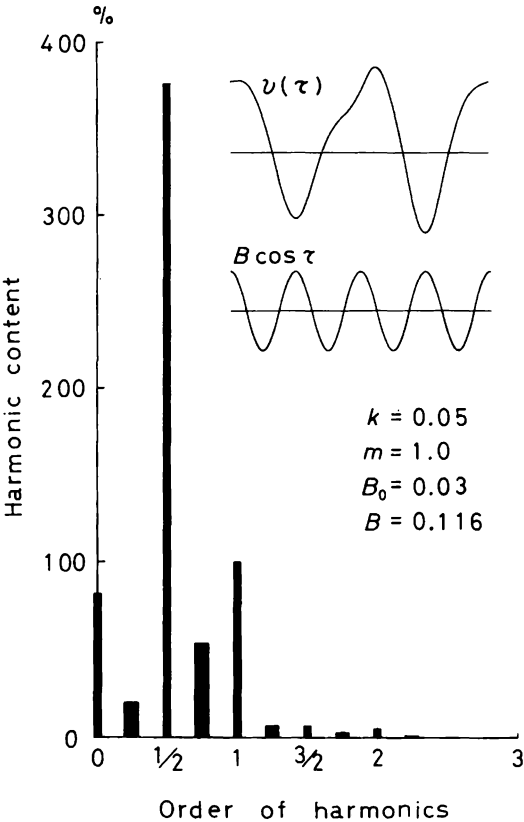


図 3.6 $\frac{3}{4}$ 調波成分を顕著に含む解 ($\frac{3}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの) .

$$\left. \begin{aligned} P_1 A_1 + 3 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi - B_m m \sin \alpha_1 &= 0, & k A_1 + 3 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi - B_m m \cos \alpha_1 &= 0 \\ P_2 A_2 + \frac{3}{2} A_1^2 A_0 \sin \varphi &= 0, & 2 k A_2 - \frac{3}{2} A_1^2 A_0 \cos \varphi &= 0 \\ P_0 A_0 + \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \sin \varphi &= B_0, & & \end{aligned} \right\} (3.39)$$

ここに

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} A_2^2 + 3 A_0^2 - m, & P_2 &= \frac{3}{4} A_2^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_0^2 - 4 m \\ P_0 &= A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_2^2), & \varphi &= 2 \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

式 (3.39) より周期解 (3.38) の各振幅および位相角を決定することができる。

文献 [1] に従って周期解 (3.38) の安定性を吟味するために、この周期解を $v_0(\tau)$ で表わし、それからの変分 $\xi(\tau)$ を考える。第 3.4(b) 節と同様にして、変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{m} v_0^2 \xi = 0 \quad (3.40)$$

となる。

$$\xi(\tau) = e^{-\delta \tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (3.41)$$

なる変換を用い、周期解 (3.38) を式 (3.40) に代入すると、第 1.11(b) 節の Hill の方程式 (1.127) を得る。従って周期解 (3.38) の安定性を第 1.11(b) 節の考察に従って吟味することができる。

数値例

式 (3.38) の振幅特性を式 (3.39) より求め、その結果を図 3.7 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.1, \quad m = 1.0, \quad B_0 = 0.8 \quad (3.42)$$

である。第 1.11(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。破線 ab の部分では周期解 (3.38) の周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.38) は不安定となる。また破線 cd の部分では $\frac{1}{2}$ 調波成分および $\frac{3}{2}$ 調波成分を持つ振動が励起することにより周期解 (3.38) が不安定となる。

(b) 第 3 高調波成分をも考慮した近似解

外力の振幅 B が大きい場合には解に第 3 高調波成分が顕著に現われる。第 3 高調波成分をも

考慮した第2高調波解について考察する。周波数 ν を2とすれば、式(3.13)は

$$\nu = A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) + A_0 \quad (3.43)$$

となる。^{*} 調波解析法により周期解(3.43)の各振幅および位相角を決定するために、式(3.43)を式(3.5)に代入し、周波数1, 2, および3の周波数成分を含む三角関数 sine および cosine の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{array}{llll} X_1=0, & Y_1=0, & X_2=0, & Y_2=0 \\ X_3=0, & Y_3=0, & X_0=B_0 \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

ただし式(1.134)の記号を用いた。式(3.44)より周期解(3.43)の各振幅および位相角を決定することができる。

文献[1]に従って周期解(3.43)の安定性を吟味する。第3.4(b)節と同様にして、変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{d^2 \tau} + \frac{k}{m} \frac{d \xi}{d \tau} + \frac{3}{m} \nu_0^2 \xi = 0 \quad (3.45)$$

となる。

$$\xi(\tau) = e^{-\delta \tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (3.46)$$

なる変換を用い、周期解(3.43)を式(3.45)に代入すると、第1.11(c)節のHillの方程式(1.135)を得る。従って周期解(3.43)の安定性を第1.11(c)節の考察に従って吟味することができる。

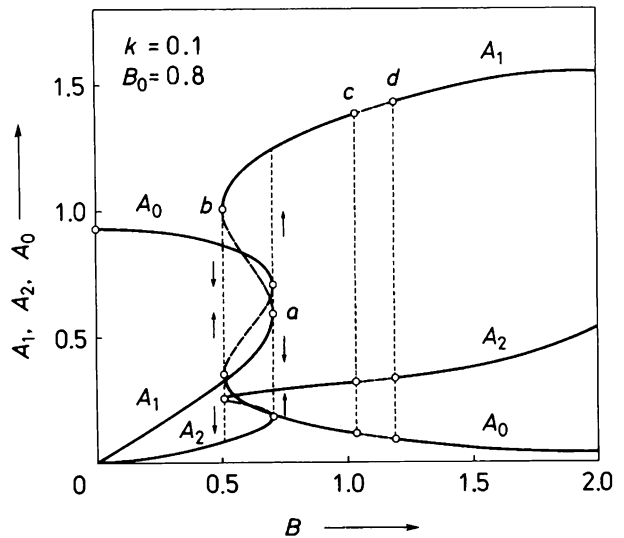


図 3.7 外力に直流分を含む場合の基本調波振動および第2高調波振動の振幅特性。

^{*} 式(3.43)は外力が直流分を持たない場合の第2高調波解(1.133)の周波数成分と同じ周波数成分を持つ。

数値例

式 (3.43) の振幅特性を式 (3.44) より求め、その結果を図 3.8 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 0.14, \quad B_0 = 0.04 \quad (3.47)$$

である。第 1.11 (c) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。第 2 高調波成分の振幅特性曲線において破線 $a b$ の部分および破線 $e f$ の部分では周期解 (3.43) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.43) は不安定となる。また破線 $c d$ の部分では $\frac{1}{2}$ 調波成分 ($n=1, 3, 5$) を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.43) が不安定となる。なお図 1.16 と図 3.8 を比較すると、外力に直流分を含まない場合には、外力の振幅 B を増加するにつれて基本調波以

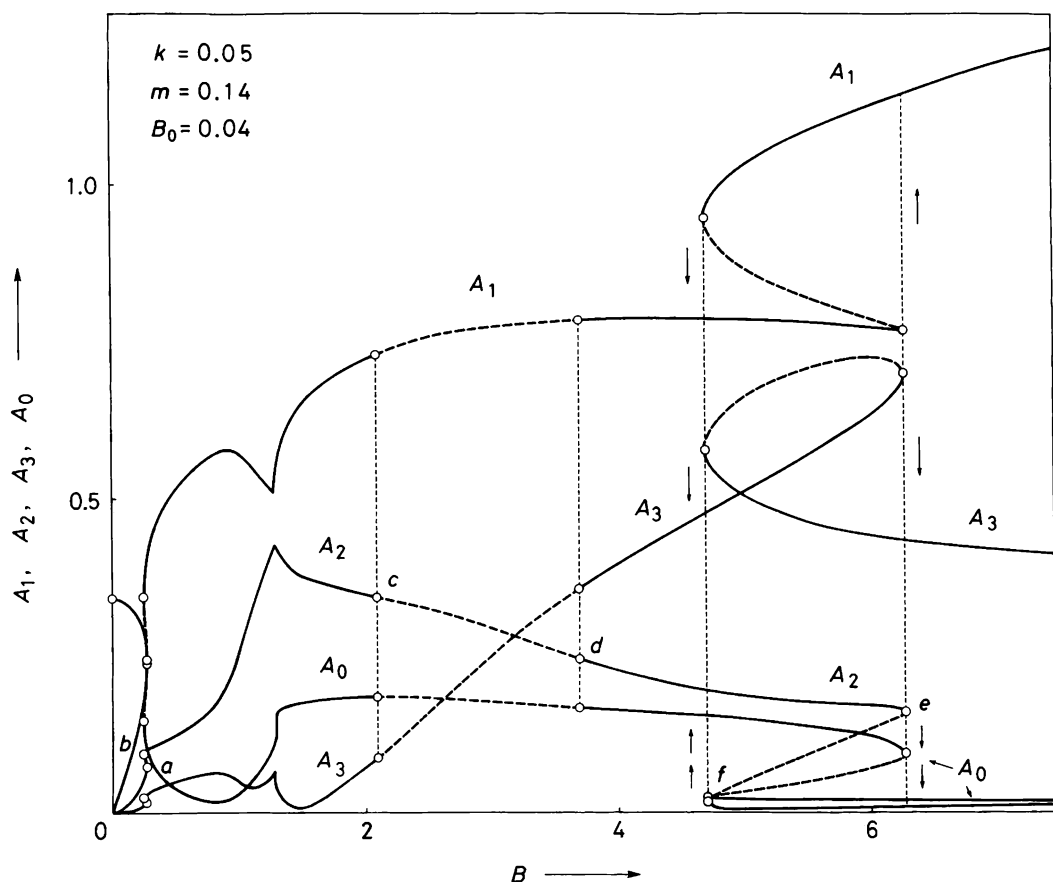


図 3.8 外力に直流成分を含む場合の第 2 高調波振動および第 3 高調波振動の振幅特性。

外に第3高調波成分が現われるが、外力に直流分を含む場合には、まず第2高調波成分が現われ、しかもこれが外力の振幅 B の広い範囲で存在する。

3.7 $\frac{3}{2}$ 調波振動^[23]

第3.6(a)節において第2高調波解(3.38)の安定性を文献[1]に従って考察した。その結果式(3.5)の解が基本調波成分および第2高調波成分を含む場合に、 $\frac{1}{2}$ 調波成分および $\frac{3}{2}$ 調波成分を持つ振動が励起することが判った。この節では $\frac{3}{2}$ 調波解を調波解析法を用いて求め、その安定性を吟味する。特に $\frac{7}{4}$ 調波成分($n=1, 3, 5, 7$)を持つ振動が励起することにより $\frac{3}{2}$ 調波解が不安定となる場合のあることを説明する。

(a) 周期解

周波数 ν を $\frac{3}{2}$ とすれば、式(3.12)は

$$\begin{aligned} v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\tau + \alpha_{\frac{3}{2}}\right) \\ & + A_{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{\frac{1}{2}}\right) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

となる。調波解析法により周期解(3.48)の各振幅および位相角を決定するために、式(3.48)を式(3.5)に代入し、周波数 $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 、および 2 の周波数成分を含む三角関数 \sin および \cos の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\begin{aligned} P_1 A_1 + \frac{3}{4} [& A_{\frac{1}{2}}^2 A_2 \cos \varphi_1 + A_{\frac{3}{2}} A_2 \cos \varphi_2 + 2 A_{\frac{1}{2}}^2 A_0 \sin \varphi_3 + 2 A_1 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_4 \\ & + 2 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_2 \cos \varphi_5 - 4 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_0 \sin \varphi_6 - 4 A_1 A_2 A_0 \sin \varphi_7] - B_m m \sin \alpha_1 = 0 \\ k A_1 + \frac{3}{4} [& -A_{\frac{1}{2}}^2 A_2 \sin \varphi_1 + A_{\frac{3}{2}} A_2 \sin \varphi_2 - 2 A_{\frac{1}{2}}^2 A_0 \cos \varphi_3 + 2 A_1 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_4 \\ & + 2 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_2 \sin \varphi_5 + 4 A_{\frac{3}{2}} A_{\frac{1}{2}} A_0 \cos \varphi_6 + 4 A_1 A_2 A_0 \cos \varphi_7] - B_m m \cos \alpha_1 = 0 \\ P_{\frac{3}{2}} A_{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} [& -\frac{1}{3} A_{\frac{1}{2}}^3 \cos \varphi_8 + A_1^2 A_{\frac{1}{2}} \cos \varphi_4 - 4 A_{\frac{1}{2}} A_2 A_0 \sin \varphi_9 \\ & + 2 A_1 A_{\frac{3}{2}} A_2 \cos \varphi_2 + 2 A_1 A_{\frac{1}{2}} A_2 \cos \varphi_5 - 4 A_1 A_{\frac{1}{2}} A_0 \sin \varphi_6 = 0 \\ \frac{3}{2} k A_{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} [& -\frac{1}{3} A_{\frac{1}{2}}^3 \sin \varphi_8 - A_1^2 A_{\frac{1}{2}} \sin \varphi_4 + 4 A_{\frac{1}{2}} A_2 A_0 \cos \varphi_9 \\ & - 2 A_1 A_{\frac{3}{2}} A_2 \sin \varphi_2 + 2 A_1 A_{\frac{1}{2}} A_2 \sin \varphi_5 - 4 A_1 A_{\frac{1}{2}} A_0 \cos \varphi_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_{1/2} A_{1/2} + \frac{3}{4} [A_1^2 A_{3/2} \cos \varphi_4 - A_{3/2} A_{1/2}^2 \cos \varphi_8 + 2 A_1 A_{3/2} A_2 \cos \varphi_5 \\
& \quad - 4 A_1 A_{3/2} A_0 \sin \varphi_6 - 2 A_1 A_{1/2} A_2 \cos \varphi_1 - 4 A_{3/2} A_2 A_0 \sin \varphi_9 + 4 A_1 A_{1/2} A_0 \sin \varphi_3 = 0 \\
& \frac{1}{2} k A_{1/2} + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_{3/2} \sin \varphi_4 + A_{3/2} A_{1/2}^2 \sin \varphi_8 - 2 A_1 A_{3/2} A_2 \sin \varphi_5 \\
& \quad + 4 A_1 A_{3/2} A_0 \cos \varphi_6 - 2 A_1 A_{1/2} A_2 \sin \varphi_1 + 4 A_{3/2} A_2 A_0 \cos \varphi_9 + 4 A_1 A_{1/2} A_0 \cos \varphi_3 = 0 \\
& P_2 A_2 + \frac{3}{4} [-2 A_1^2 A_0 \sin \varphi_7 - A_1 A_{1/2}^2 \cos \varphi_1 + A_1 A_{3/2}^2 \cos \varphi_2 \\
& \quad + 2 A_1 A_{3/2} A_{1/2} \cos \varphi_5 - 4 A_{3/2} A_{1/2} A_0 \sin \varphi_9 = 0 \\
& 2 k A_2 + \frac{3}{4} [-2 A_1^2 A_0 \cos \varphi_7 - A_1 A_{1/2}^2 \sin \varphi_1 + A_1 A_{3/2}^2 \sin \varphi_2 \\
& \quad + 2 A_1 A_{3/2} A_{1/2} \sin \varphi_5 - 4 A_{3/2} A_{1/2} A_0 \cos \varphi_9 = 0 \\
& P_0 A_0 + \frac{3}{4} [-A_1^2 A_2 \sin \varphi_7 + A_1 A_{1/2}^2 \sin \varphi_3 - 2 A_1 A_{3/2} A_{1/2} \sin \varphi_6 - 2 A_{3/2} A_{1/2} A_2 \sin \varphi_9 = 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

ここに

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_2^2) + 3 A_0^2 - m \\
P_{3/2} &= \frac{3}{4} A_{3/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1/2}^2 + A_2^2) + 3 A_0^2 - \frac{9}{4} m \\
P_{1/2} &= \frac{3}{4} A_{1/2}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{3/2}^2 + A_2^2) + 3 A_0^2 - \frac{1}{4} m \\
P_2 &= \frac{3}{4} A_2^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2) + 3 A_0^2 - 4 m \\
P_0 &= A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_2^2) \\
\varphi_1 &= -\alpha_1 - 2\alpha_{1/2} + \alpha_2 & \varphi_2 &= -\alpha_1 + 2\alpha_{3/2} - \alpha_2 \\
\varphi_3 &= -\alpha_1 + 2\alpha_{1/2}, & \varphi_4 &= -2\alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2} \\
\varphi_5 &= -\alpha_1 - \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2} + \alpha_2, & \varphi_6 &= -\alpha_1 + \alpha_{3/2} - \alpha_{1/2} \\
\varphi_7 &= -2\alpha_1 + \alpha_2, & \varphi_8 &= -\alpha_{3/2} + 3\alpha_{1/2} \\
\varphi_9 &= -\alpha_{3/2} - \alpha_{1/2} + \alpha_2
\end{aligned}$$

式 (3.49) より式 (3.48) の各振幅および位相角を決定することができる。^{*}

(b) 周期解の安定性

第 3.4 (b) 節の考察に従って周期解 (3.48) の安定性を吟味する。周期解 $v_0(\tau)$ は前節で求められるから、周期解 (3.48) を式 (3.20) に代入すると次の Hill の方程式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + [\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^8 \theta_n \cos(\frac{n}{2}\tau - \epsilon_n)] \eta = 0 \quad (3.50)$$

ここに θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 8$) は周期解 (3.48) の各振幅および位相角で表わされる。詳細な式を付録 I に示す。文献 [1] に従って式 (3.50) の第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 3, 4$) における解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} \sum_{n=1}^4 a_{(2n-1)/4} \sin[(2n-1)/4 \tau - \sigma_{(2n-1)/4}] \quad (3.51)$$

と仮定する。式 (3.51) を式 (3.50) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.76) を得る。ただし式 (1.76) において $m=4$, $n=4$ である。また第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 3, 4$) における式 (3.50) の解を

$$\eta(\tau) = e^{\mu\tau} [a_0 + \sum_{n=1}^4 a_{2n/4} \sin(2n/4 \tau - \sigma_{2n/4})] \quad (3.52)$$

と仮定する。式 (3.52) の周波数成分は周期解 (3.48) の周波数成分に等しい。式 (3.52) を式 (3.50) に代入し、調波解析を行なうと μ を定める式 (1.78) を得る。ただし式 (1.78) において $m=4$, $n=4$ である。

式 (3.19), 式 (3.51), および式 (3.52) より $|\mu| < \delta$ ならば時間の経過と共に変分 $\xi(\tau)$ は零に収束する。従って式 (1.76) および式 (1.78) を用いて第 $2n-1$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 3, 4$) における安定条件および第 $2n$ 次不安定領域 ($n=1, 2, 3, 4$) における安定条件はそれぞれ次式で与えられる。

$$d_1(\delta) > 0 \quad (3.53)$$

$$d_2(\delta) > 0 \quad (3.54)$$

^{*} 計算機 (KDC II) を用い、ニュートン・ラプソン法により各振幅および位相角を求めた。初期値は実験結果を考慮して適当に与えた。

ただし式 (1.76) および式 (1.78)

において $m=4, n=4$ とする。なお詳しくは省略するが、式 (3.49) の関係を用いると、周期解 (3.48) の振幅特性曲線が垂直接線に有する点は $A_2(\delta)=0$ となる安定限界点と一致する。^[2, p. 105]

数値例

式 (3.48) の振幅特性を式 (3.49) より求め、その結果を図 3.9 に示す。系のパラメタは

$$k=0.1, \quad m=1.0, \quad B_0=0.8 \quad (3.55)$$

である。式 (3.48) の各振幅をすべて示すと複雑になるので、図 3.9 には振幅 $A_1, A_{3/2}$, および A_2 のみを示した。第 3.7(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定

である。 $\frac{3}{2}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分、破線 ef の部分、および破線 ij の部分では周期解 (3.48) の周波数成分と同一周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.48) は不安定となる。また破線 cd の部分および破線 gh の部分では何れも $(2n-1)/4$ 調波成分 ($n=1\sim 4$) を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.48) が不安定となる。

計算機を用いて基礎方程式 (3.5) の定常解を求め、それをフーリエ級数に展開して各周波数成分の振幅を得た。 $\frac{3}{2}$ 調波成分の比較的小さい定常解とその各周波数成分を図 3.10 に示す。また $\frac{3}{2}$ 調波成分の比較的大きい定常解とその各周波数成分を図 3.11 に示す。系のパラメタは

図 3.10 : $k=0.1, \quad m=1.0, \quad B_0=0.8, \quad B=0.86 \quad (3.56)$

図 3.11 : $k=0.1, \quad m=1.0, \quad B_0=0.8, \quad B=1.15 \quad (3.57)$

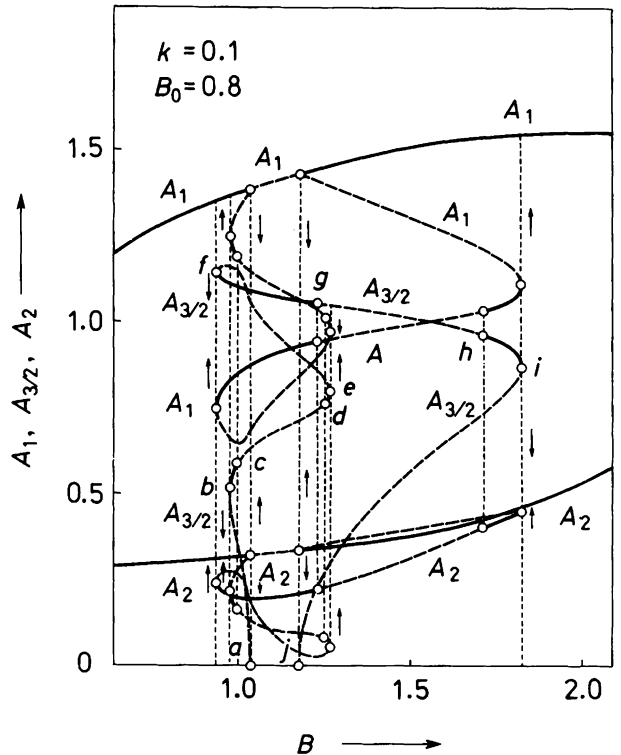


図 3.9 外力に直流成分を含む場合の $\frac{3}{2}$ 調波振動の振幅特性。

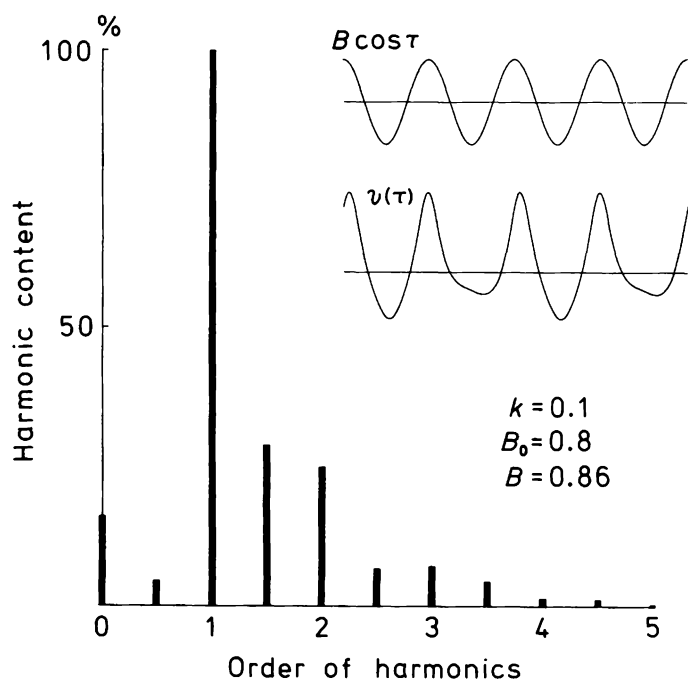


図 3.10 $\frac{3}{2}$ 調波周期解の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

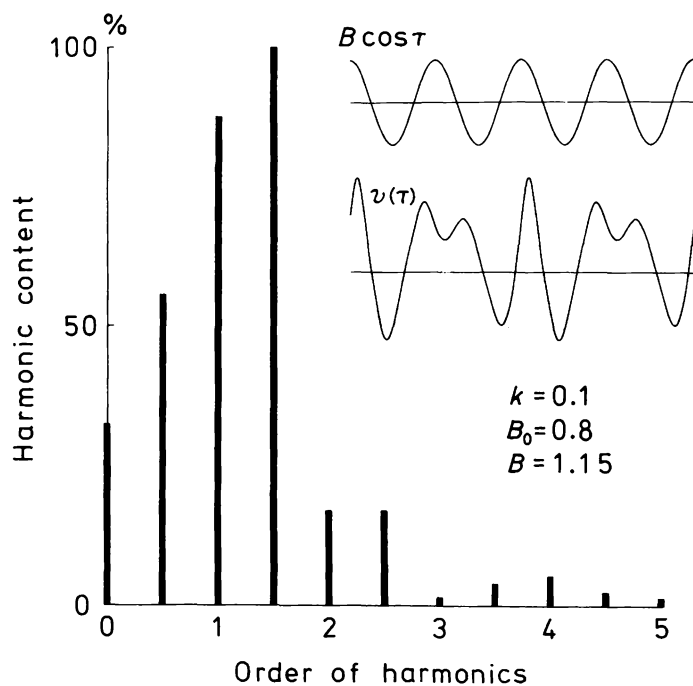


図 3.11 $\frac{3}{2}$ 調波周期解の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

である。

図 3.9 において破線 cd の部分および破線 gh の部分で励起する振動の主要周波数成分について考察する。まず系のパラメタが

$$k=0.1, \quad m=1.0, \quad B_0=0.8, \quad B=0.88 \quad (3.58)$$

の場合、基礎方程式 (3.5) を計算機を用いて解き、 $\frac{3}{2}$ 調波成分の比較的小さい定常解を求めた。定常解とその各周波数成分を図 3.12 に示す。図 3.12 において新しく励起した $\frac{1}{4}$ 調波成分 ($n=1, 3, 5, \dots$) を太線で示した。この周期解は $\frac{1}{4}$ 調波成分を含み、 $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。つぎに系のパラメタが

$$k=0.1, \quad m=1.0, \quad B_0=0.8, \quad B=1.27 \quad (3.59)$$

の場合、 $\frac{3}{2}$ 調波成分の比較的大きい定常解を求め、その各周波数成分を計算した。その結果を図 3.13 に示す。この周期解は $\frac{1}{4}$ 調波成分を顕著に含み、 $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。

3.8 $\frac{5}{2}$ 調波振動 [24]

第 3.6(b) 節において第 2 高調波解 (3.43) の安定性を吟味した。その結果、式 (3.5) の解が第 2 高調波成分および第 3 高調波成分を顕著に含む場合、 $\frac{3}{2}$ 調波成分 ($n=1, 3, 5$) を持つ振動が励起することにより第 2 高調波解 (3.43) が不安定となることが判った。^{*} この節では $\frac{5}{2}$ 調波解を調波解析法を用いて求め、その安定性を文献 [1] に従って考察する。特に $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{5}{2}$ 調波解が不安定となることを説明する。

(a) 周期解とその安定性

周波数 ν を $\frac{5}{2}$ とすれば、式 (3.13) は

$$\begin{aligned} v = & A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_2 \sin(2\tau + \alpha_2) + A_0 \\ & + A_{\frac{5}{2}} \sin\left(\frac{5}{2}\tau + \alpha_{\frac{5}{2}}\right) + A_{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\tau + \alpha_{\frac{1}{2}}\right) \\ & + A_3 \sin(3\tau + \alpha_3) \end{aligned} \quad (3.60)$$

^{*} 図 3.8 において $\frac{3}{2}$ 調波成分 ($n=1, 3, 5$) を持つ振動が励起することにより第 2 高調波解 (3.43) が不安定となる破線 cd の部分では、外力の振幅 B を増加するにつれて第 2 高調波成分は小さくなり、第 3 高調波成分は大きくなるから固有周波数は 2 と 3 の間にあると考えられる。従って励起する振動の主要周波数成分は $\frac{5}{2}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{5}{2}$ 調波振動が励起するものと推測される。

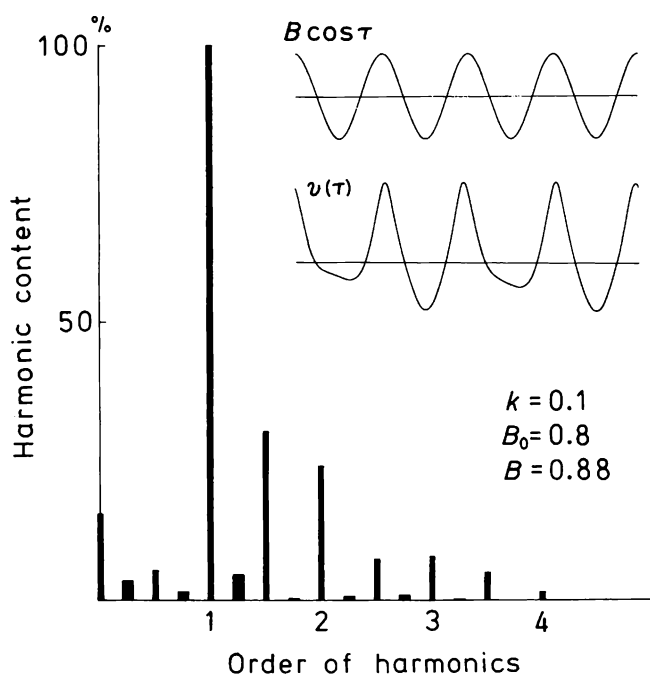


図 3.12 $\frac{1}{4}$ 調波成分を持つ解 ($\frac{1}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

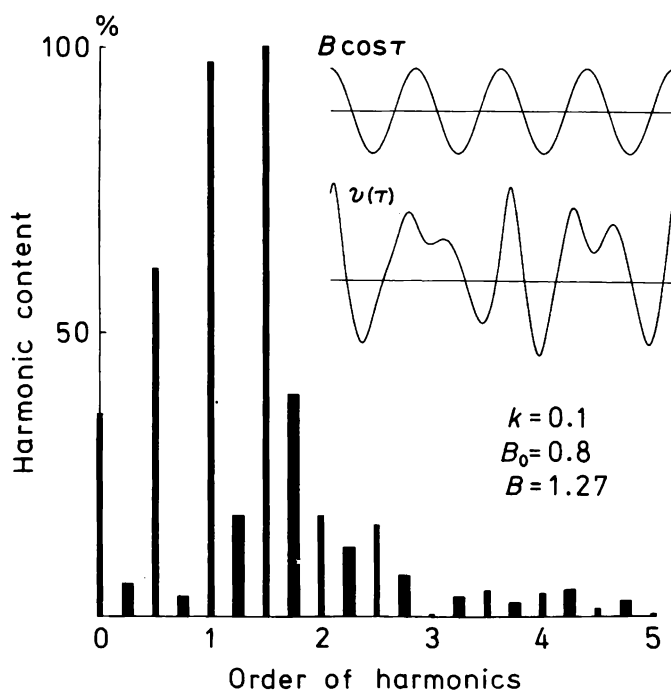


図 3.13 $\frac{1}{4}$ 調波成分を持つ解 ($\frac{1}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

となる*。調波解析法により周期解 (3.60) の各振幅および位相角を決定するために、式 (3.60) を式 (3.5) に代入し、周波数 $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}$, および 3 の周波数成分を含む三角関数 \sin および \cos の係数および直流項をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= 0, & X_2 &= 0, & Y_2 &= 0, \\ X_0 &= B_0, & X_{\frac{5}{2}} &= 0, & Y_{\frac{5}{2}} &= 0, & X_{\frac{1}{2}} &= 0, \\ Y_{\frac{1}{2}} &= 0, & X_3 &= 0, & Y_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

ただし式 (1.142) の記号を用いた。式 (3.61) より周期解 (3.60) の各振幅および位相角を決定することができる。

文献 [1] に従って周期解 (3.60) の安定性を吟味するために、この周期解を $v_0(\tau)$ で表わし、それからの変分 $\xi(\tau)$ を考える。第 3.4(b) 節と同様にして、変分方程式は

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{k}{m} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{m} v_0^2 \xi = 0 \quad (3.62)$$

となる。

$$\xi(\tau) = e^{-\delta\tau} \eta(\tau), \quad \delta = \frac{k}{2m} \quad (3.63)$$

なる変換を用い、周期解 (3.60) を式 (3.62) に代入すると、第 1.12(b) 節の Hill の方程式 (1.143) を得る。従って周期解 (3.60) の安定性は第 1.12(b) 節の考察に従って吟味することができる。

数値例

式 (3.60) の振幅特性を式 (3.61) より求め、その結果を図 3.14 に示す。系のパラメタは

$$k = 0.05, \quad m = 0.14, \quad B_0 = 0.04 \quad (3.64)$$

である。第 1.12(b) 節の考察に従って安定性を吟味した結果、実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。 $\frac{5}{2}$ 調波成分の振幅特性曲線において破線 ab の部分および破線 cd の部分では何れも $(2n-1)/4$ 調波成分 ($n=1, 2, \dots, 6$) を持つ振動が励起することにより周期解

* 式 (3.60) は外力に直流分を含まない場合の周期解 (1.141) の周波数成分と同一周波数成分を持つ。また式 (3.60) は周波数 ν が $2, \frac{5}{2}$, および 3 の場合の解 (3.12) の周波数成分を持つ。

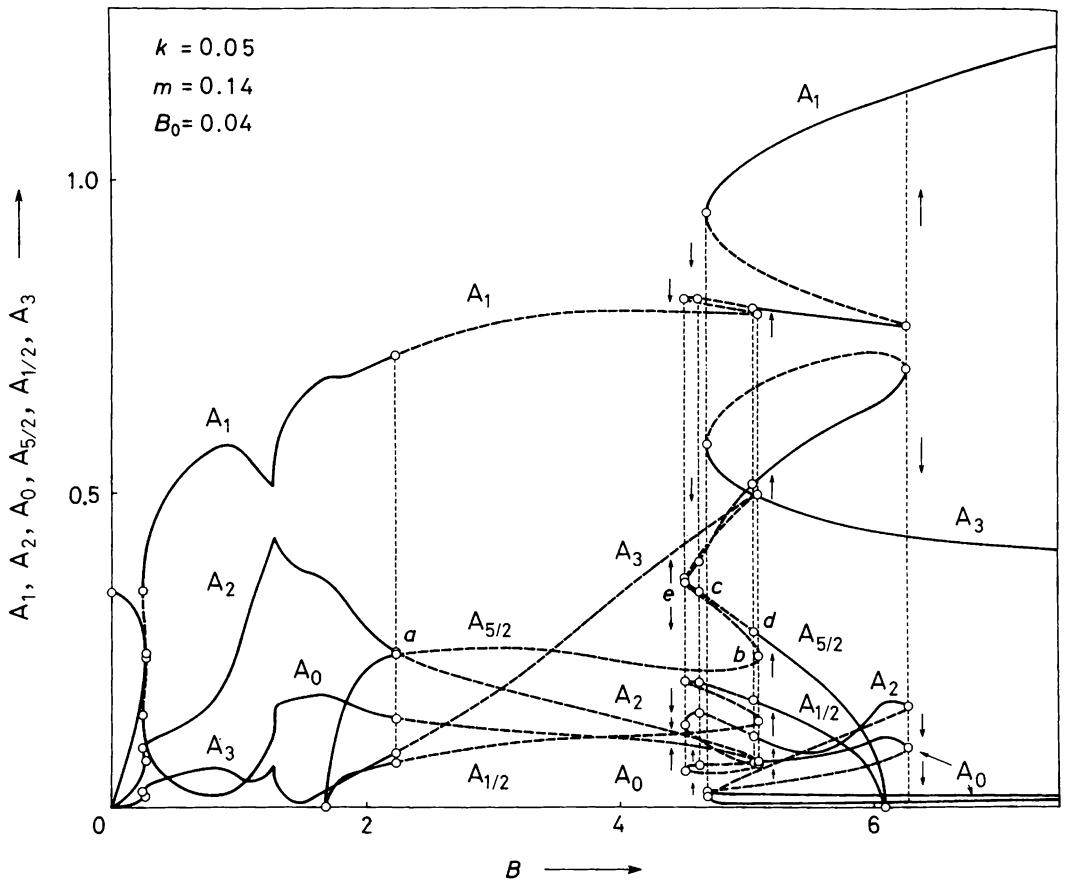


図 3.14 外力に直流成分を含む場合の第2高調波振動， $\frac{5}{2}$ 調波振動，および第3高調波振動の振幅特性。

(3.60) は不安定となる。^{*} また破線 $b e$ の部分では周期解 (3.60) の周波数成分と同じ周波数成分を持つ不安定振動が励起することにより周期解 (3.60) が不安定となる。

(b) $\frac{3}{4}$ 調波振動

前節において $\frac{5}{2}$ 調波解 (3.60) の安定性を文献 [1] に従って考察した。その結果 $(2n-1)/4$ 調波成分 ($n=1, 2, \dots, 6$) を持つ振動が励起することにより $\frac{5}{2}$ 調波解 (3.60) が不安定となることが判った。励起した振動の主要周波数成分を考察するために、基礎方程式 (3.5) を計算機を

^{*} 図 3.14 において破線 $a b$ の部分および破線 $c d$ の部分では外力の振幅 B を増加するにつれて $\frac{5}{2}$ 調波成分は概ね一定かあるいは小さくなり、第3高調波成分は大きくなるから固有周波数は $\frac{5}{2}$ と3の間にあると考えられる。従って励起する振動の主要周波数成分は $\frac{3}{4}$ 調波成分であると考えられ、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起すると推測される。

用いて解き、定常解をフーリエ級数に展開した。その結果を図 3.15 および図 3.16 に示す。系のパラメタは

図 3.15 :

$k=0.05,$
 $m=0.14,$
 $B_0=0.04,$
 $B=4.26$

(3.65)

図 3.16 :

$k=0.05,$
 $m=0.14,$
 $B_0=0.04,$
 $B=4.60$

(3.66)

である。図 3.15 および図 3.16 において新しく励起した $(2n-1)/4$ 調波成分 ($n=1, 2, \cdots$) を太線で示した。 $\frac{3}{4}$ 調波成分が顕著に現われ、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。なおこれらの定常解には $\frac{3}{4}$ 調波成分が比較的大きく含まれる。周波数 ν を $\frac{3}{4}$ とすると式 (3.13) において $|2-\nu|$ は $\frac{3}{4}$ となる。また $\frac{3}{4}$ 調波振動は外力の振幅 B の狭い範囲で安定に存在する。

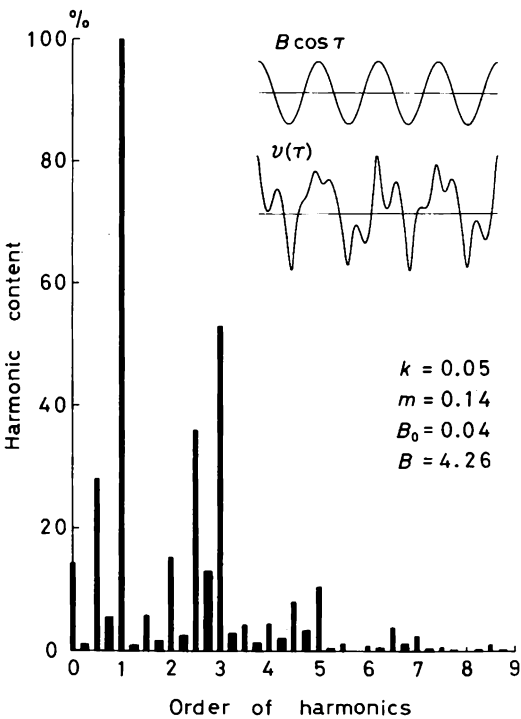


図 3.15 $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ解 ($\frac{3}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

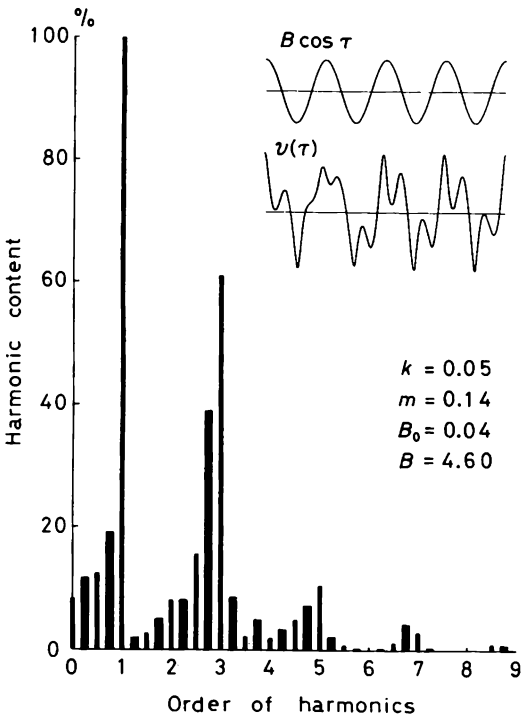


図 3.16 $\frac{3}{4}$ 調波成分を持つ解 ($\frac{3}{4}$ 調波周期解) の調波解析 (基礎方程式 (3.5) の解をフーリエ級数に展開したもの)。

第4章 鉄心中の磁束を直流偏極した直列共振回路

に発生する振動の実験的考察

4.1 緒 言

直列共振回路に正弦波電圧および直流電圧を印加すると、外力周波数と簡単な整数比 (m/n) をなす周波数成分を顕著に持つ m/n 調波振動が発生する。第3章において振動を記述する微分方程式を導き、各種の周期解を調波解析法を用いて求めた。また文献 [1] に従ってそれらの安定性を吟味した。その結果周期解を不安定にする振動の主要周波数成分が判ると共に新しく励起する振動を予知することができた。なお外力に直流分を含む場合には m あるいは n が偶数の m/n 調波振動が励起しやすいことが判った。以上の解析結果を検討するために、鉄心中の磁束を直流偏極した直列共振回路において実験を行なう。

4.2 実験回路

実験回路を図 4.1 に示す。実験結果と解析結果を比較するために、リアクトルの特性を 3 次特性に近づけた。そのためには鉄心に空隙を設けたリアクトルと空隙のないリアクトルを直列に接続した。^[1, p. 65] リアクトルの 1 次巻線を容量と直列に接続し共振回路を形成する。2 次巻線には外部電源より直流電流 i_0 を流す。^{*} 交流電源電圧の任意の位相において振動を開始させるために、逆並列に接続した SCR を用いた。

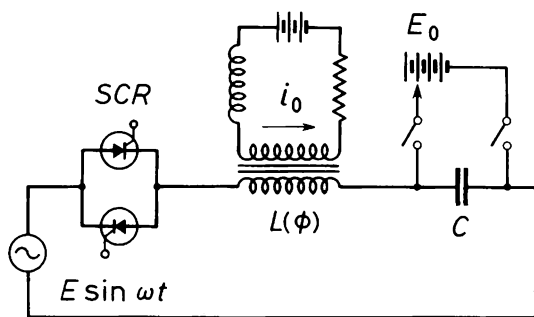


図 4.1 鉄心中の磁束を直流偏極したリアクトルを含む直列共振回路 (実験回路)。

^{*} 鉄心中の磁束の振動により直流電流にリップルを生じるが、直流電源を高電圧とし、リアクトルと高抵抗を直流電源回路に直列に接続してリップルを 6% 以下にした。

4.3 理論的考察との比較^[23]

実験で使したリアクトルの特性は、電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E と電流の波高値 I の関係で示すと次式で与えられる。

$$I = 0.963 E^3 \times 10^{-7} \text{ [A]} \quad (4.1)$$

コイルの巻数を n とすれば、電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E と鉄心中の磁束の振幅 Φ との間には次の関係がある。

$$E = n \omega \Phi \quad (4.2)$$

実験において電源周波数は 60 [Hz] であり、

$$C_n = 10 \text{ } [\mu\text{F}] \quad (4.3)$$

とすると、式 (3.4), 式 (4.1), および式 (4.2) より次の関係式を得る。

$$n \omega \Phi_n = 198 \text{ [V]}, \quad I_n = 0.746 \text{ [A]} \quad (4.4)$$

図 4.1 の実験回路において、種々の大きさの電源電圧および容量 C の下に、初期条件として回路閉路時の電源電圧位相および容量 C の初期充電電圧を適当に与えると、共振回路に各種の振動が発生する。電源電圧の振幅 E を変えて鉄心中の振動磁束 ϕ の周波数成分を求めた。^{*} 各周波数成分の振幅を図 4.2 に示す。実験結果と解析結果を定量的に比較するために、容量 C , 直流電流 i_0 , 電源電圧の振幅 E , および磁束 ϕ の各周波数成分を式 (4.3) および式 (4.4) を用いてそれぞれ式 (3.5) における m , B_0 , B , および v の各調波成分 r に換算した。系のパラメータは

$$m = 1.0, \quad B_0 = 0.07 \quad (4.5)$$

である。図 4.2 における数字は各周波数成分の周波数を表す。図 4.2 において電源電圧の振幅 B を零から増加すると、基本調波振動が発生し、 $B = 0.093$ で $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起することにより基本調波振動は不安定となる。 $B = 0.093 \sim 0.146$ で $\frac{1}{2}$ 調波振動は安定であるが、 $B = 0.146$ で $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{1}{2}$ 調波振動は不安定となる。 $\frac{3}{4}$ 調波振動は電源電圧の振幅の狭い範囲 ($B = 0.146 \sim 0.157$) で電源電圧に同期化する。これらの実験結果は図 3.2 および図 3.3 の解析結果

^{*} ヘテロダイン波形分析器を用いた。

に対応する。なお図4.2には詳細な結果を示していないが、 $B=0.157\sim 0.230$ では電源電圧に同期化することが困難な振動が発生し、 $\frac{1}{3}$ 調波振動あるいは $\frac{2}{3}$ 調波振動が電源電圧の振幅の狭い範囲で同期化するのが観察された。 $B=0.230\sim 0.429$ では基本調波の共振々動が発生する。また $B=0.45$ から電源電圧の振幅を減少すると、 $B=0.448$ で $\frac{1}{2}$ 調波振動が励起する。 $B=0.432$ で $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{1}{2}$ 調波振動は不安定となり、 $B=0.429$ で振動は基本調波の共振々動となる。

電源電圧 V および鉄心中の各振動磁束 ϕ の時間的変化を記録し、磁束 ϕ をフーリエ級数に展開して各周波数成分の振幅を求めた。その結果を図4.3～図4.6に示す。 $\frac{1}{2}$ 調波振動の時間的変化とその各周波数成分を図4.3に示す。

図4.4に示すように、 $(2n-1)/4$ 調

波成分($n=1, 2, \dots$)を持つ振動が励起することにより $\frac{1}{2}$ 調波振動が不安定となる。図4.4において新しく励起した $(2n-1)/4$ 調波成分($n=1, 2, \dots$)を太線で示した。 $\frac{3}{4}$ 調波成分が顕著に現われ、 $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起したと考えられる。図4.5において $\frac{2}{3}$ 調波振動には $\frac{1}{3}$ 調波成分が顕著に含まれる。第1.7節において $\frac{1}{3}$ 調波振動が励起することにより $\frac{2}{3}$ 調波振動が不安定となることを述べた。なお $\frac{2}{3}$ 調波振動には $\frac{1}{3}$ 調波成分および $\frac{2}{3}$ 調波成分が比較的大きく含まれる。周波数 ν を $\frac{1}{3}$ とすると、式(3.10)において周波数 $|1-2\nu|$ および $|1-\nu|$ はそれぞれ $\frac{1}{3}$ および $\frac{2}{3}$ となる。また図4.6において $\frac{2}{3}$ 調波振動には $\frac{1}{3}$ 調波成分が比較的大きく含まれる。周波数 ν を $\frac{2}{3}$ とすると、式(3.10)において周波数 $|1-2\nu|$ および $|1-\nu|$ は $\frac{1}{3}$ となる。系のパラメタが

$$m=1.0, \quad B_0=0.03 \quad (4.6)$$

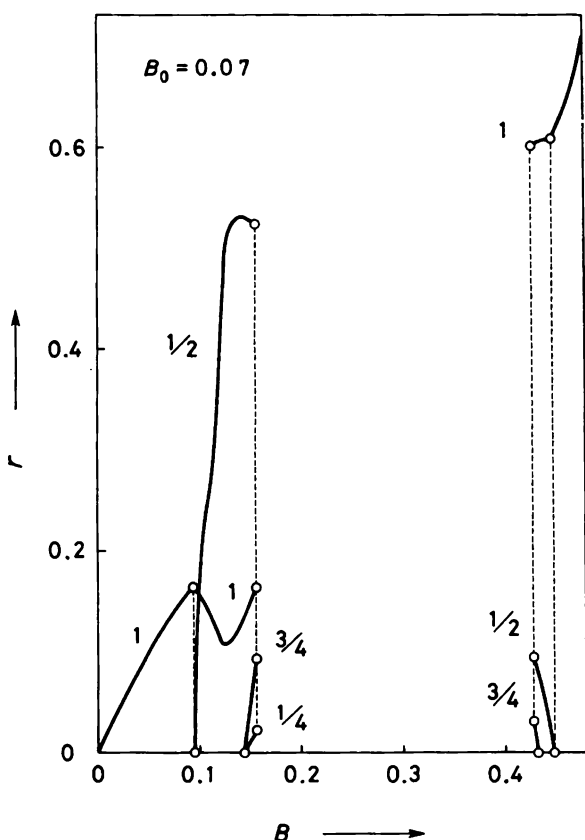


図4.2 鉄心中の磁束を直流偏極した場合に励起する $\frac{1}{2}$ 調波振動および $\frac{3}{4}$ 調波振動の振幅特性。

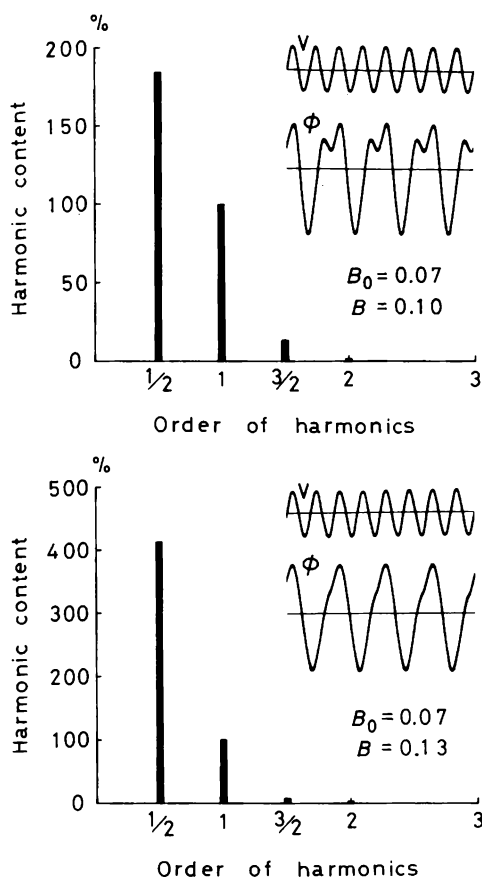


図 4.3 $\frac{1}{2}$ 調波振動磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束をフーリエ級数に展開したもの）。

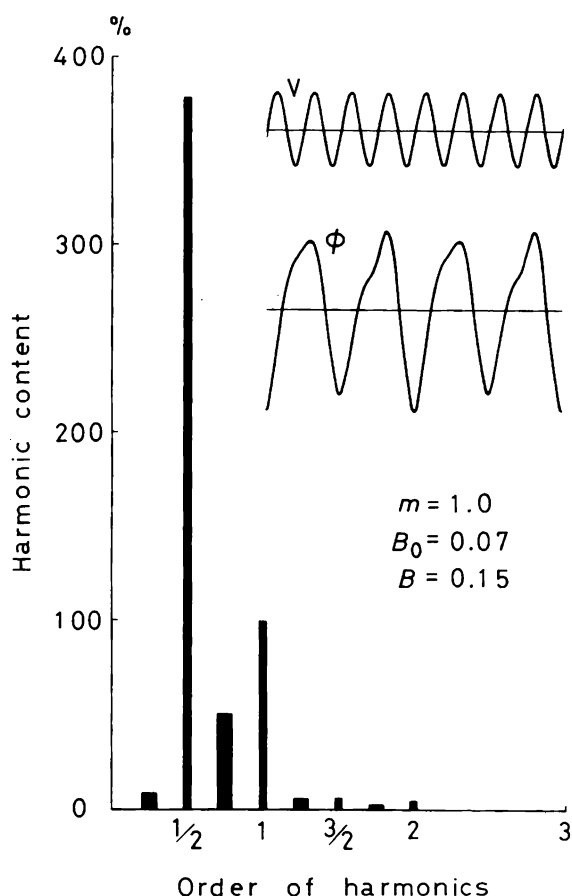


図 4.4 $\frac{3}{4}$ 調波成分を顕著に含む振動（ $\frac{3}{4}$ 調波振動）の磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの）。

の場合に発生する各振動磁束の周波数成分を求めた。これを図 4.7 に示す。振幅の比較的小さい $\frac{1}{2}$ 調波振動は $\frac{1}{4}$ 調波振動が励起することにより不安定となり、振幅の比較的大きい $\frac{1}{2}$ 調波振動は $\frac{3}{4}$ 調波振動が励起することにより不安定となる。この実験結果は図 3.4, 図 3.5, および図 3.6 の解析結果に対応する。

周波数 ν が比較的大きい振動について考察するために、電源電圧の振幅を大きい範囲まで変化して各振動の周波数成分を求めた。その結果を図 4.8 に示す。系のパラメタは

$$m = 0.14, \quad B_0 = 0.04 \quad (4.7)$$

である。電源電圧の振幅 B を零から増加すると基本調波振動および第 2 高調波振動が発生する。

図 2.11 と図 4.8 を比較すると、鉄心中の磁束を直流偏極しない場合には、電源電圧の振幅 B を増加するにつれて基本調波成分以外に第 3 高調波等の奇数次調波成分が現われるが、磁束を直流偏極した場合にはまず第 2 高調波成分が現われる。また磁束を直流偏極した場合第 2 高調波振動が発生する電源電圧振幅 B の範囲は磁束を直流偏極しない場合の振幅 B の範囲に較べて広い。

電源電圧の振幅 B を大きくすると第 2 高調波振動には第 3 高調波成分が比較的大きく含まれる。第 2 高調波成分および第 3 高調波成分が顕著に現われる場合には、 $\frac{1}{2}$ 調波成分が励起することにより第 2 高調波振動は不安定となり、 $B = 3.04 \sim 3.59$ および $B = 4.28 \sim 4.65$ において $\frac{1}{2}$ 調波振動が発生する*。

この実験結果は図 3.8 および図 3.14 の解析結果に対応する。また $B = 3.59 \sim 4.28$ では $\frac{1}{2}$ 調波振動は不安定となり、電源電圧に同期化することが困難な振動が発生する。

電源電圧 V および鉄心中の $\frac{1}{2}$ 調波振動磁束 ϕ の時間的変化を記録し、磁束 ϕ をフーリエ級数に展開して各周波数

* 電源電圧の振幅 B が 3 ～ 4 の付近では、電源電圧の振幅 B を増加するにつれて第 2 高調波成分は小さくなり、第 3 高調波成分は大きくなるので固有周波数は 2 と 3 の間にあると考えられる。

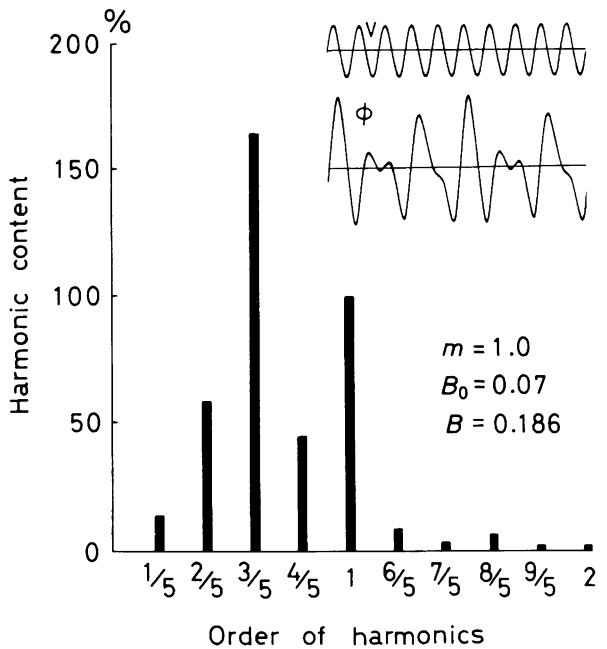


図 4.5 $\frac{1}{2}$ 調波振動磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束をフーリエ級数に展開したもの）。

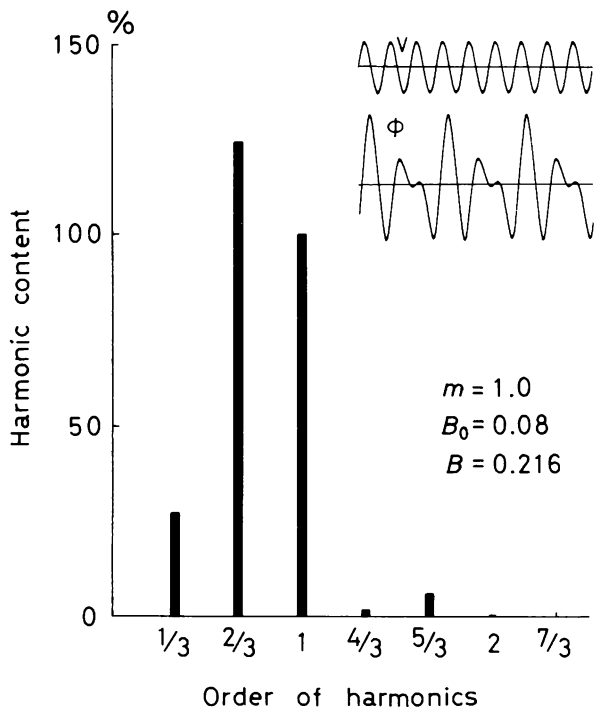


図 4.6 $\frac{1}{2}$ 調波振動磁束の調波解析（電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの）。

成分を求めた。その結果を図 4.9 に示す。図 4.9 において主要周波数成分は式 (3.60) の周波数成分と一致する。

なお図 4.8 において電源電圧の振幅 B を増加するにつれて振動振幅の平均値は大きくなり固有周波数は高くなるので、振動の主要成分の周波数 ν は高くなると考えられる。

直流電流 B_0 を比較的大きくした場合に発生する各振動磁束の周波数成分を求めた。その結果を図 4.10 に示す。この実験に使用したリアクトルの特性は、電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E と電流の波高値 I の関係で示すと

$$I = 0.778 E^3 \times 10^{-7} \text{ [A]} \tag{4.8}$$

で与えられる。実験結果を図 3.7 および図 3.9 の解析結果と比較検討するため

$$C_n = 4 \text{ [}\mu\text{F]}, \quad n\omega \Phi_n = 139.2 \text{ [V]}, \quad I_n = 0.210 \text{ [A]} \tag{4.9}$$

とし、系のパラメタを

$$m = 1.0, \quad B_0 = 0.8 \tag{4.10}$$

とした。図 4.10 において電源電圧の振幅 B を零から増加すると基本調波の非共振々動が $B = 0.72$ で共振々動となる。直流電流 B_0 を大きくしたので第 2 高調波成分が比較的大きい。文献 [1] に従って周期解の安定性を考察すれば、基本調波成分および第 2 高調波成分が顕著に現

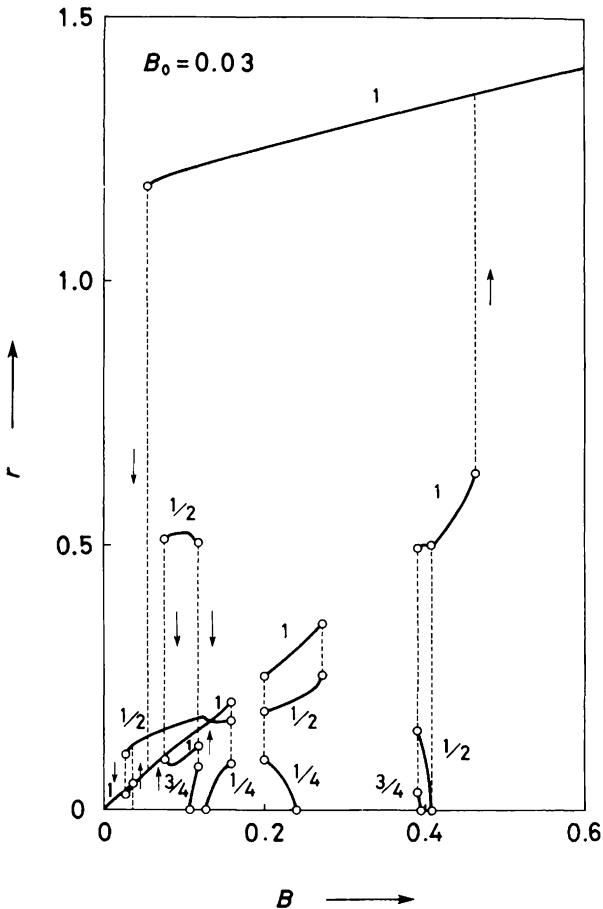


図 4.7 鉄心中の磁束を直流偏極した場合に励起する $1/4$ 調波振動, $1/2$ 調波振動, $3/4$ 調波振動, および基本調波振動の振幅特性.

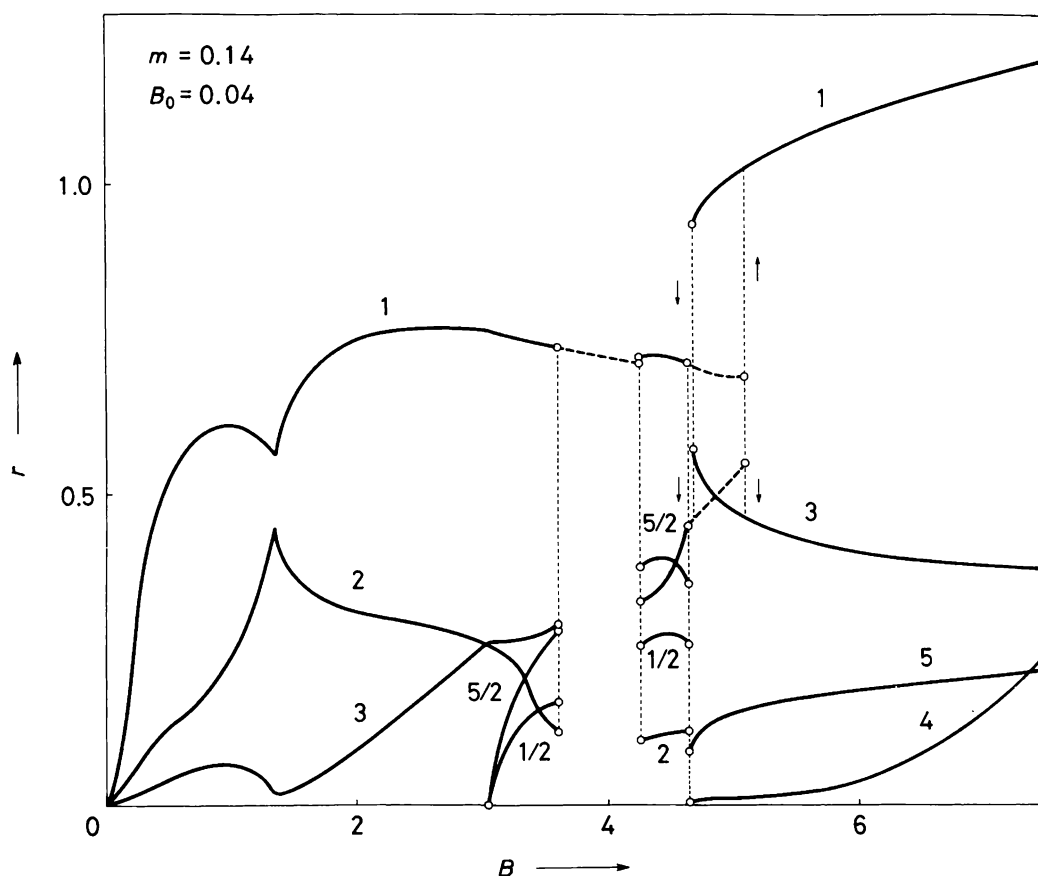


図 4.8 鉄心中の磁束を直流偏極した場合に励起する振動（第 2 高調波振動， $\frac{5}{2}$ 調波振動，第 3 高調波振動）の振幅特性。

われる場合には $\frac{5}{2}$ 調波振動が励起する場合のあることを予知できる。 $B = 0.81$ において $\frac{3}{2}$ 調波成分が励起することにより第 2 高調波成分を含む振動が不安定となり， $\frac{3}{2}$ 調波振動が励起したと考えられる。 $B = 0.81 \sim 0.87$ において振幅の比較的小さい $\frac{3}{2}$ 調波振動が発生し， $B = 0.87$ で $\frac{5}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{3}{2}$ 調波振動が不安定となる。文献 [1] に従って安定性を考察すれば，基本調波成分および $\frac{3}{2}$ 調波成分を顕著に持つ振動が $\frac{5}{4}$ 調波振動の励起することにより不安定となる場合のあることは理解できる。また $B = 1.11 \sim 1.27$ において初期条件を適当に与えると，振幅の比較的大さい $\frac{3}{2}$ 調波振動が発生する。 $B = 1.27$ において $\frac{5}{4}$ 調波振動が励起することにより $\frac{3}{2}$ 調波振動が不安定となり， $B = 1.27 \sim 1.34$ および $B = 1.40 \sim 1.45$ において $\frac{5}{4}$ 調波振動が発生する。さらに電源電圧の振幅 B を大きくすると第 2 高調波振動が発生する。文献 [1] に従って安定性を考察すれば， $\frac{3}{2}$ 調波成分および第 2 高調波成分を顕著に

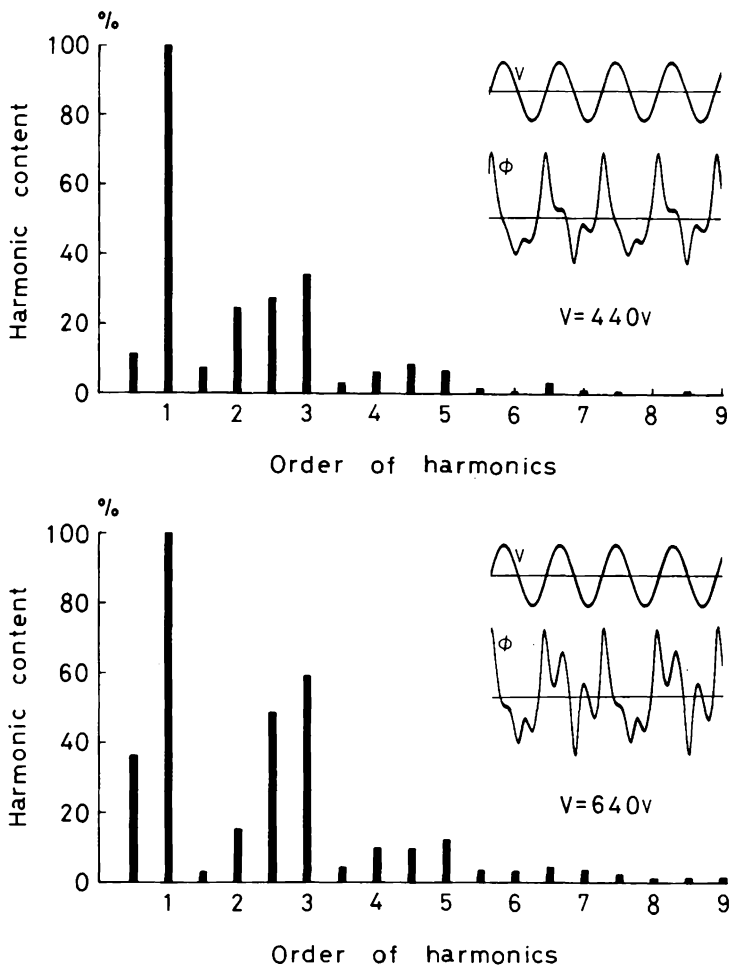


図 4.9 $\frac{1}{2}$ 調波振動磁束の調波解析 (電気回路に発生する振動磁束 ϕ をフーリエ級数に展開したもの)。

持つ振動が $\frac{7}{4}$ 調波振動の励起することにより不安定となる場合のあることは理解できる。これらの実験結果を図 3.7 および図 3.9 の解析結果と比較すると概ね良好な一致を得た。なお電源電圧 V および鉄心中の磁束 ϕ の時間的変化を観察した結果を図 4.11 に示す。

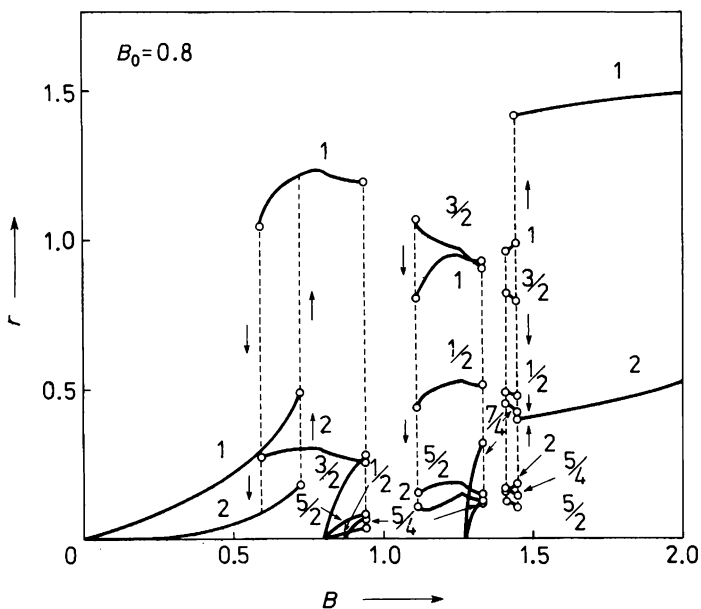
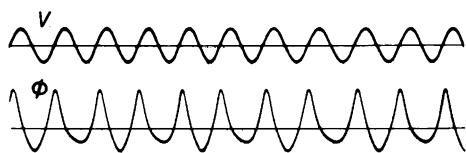
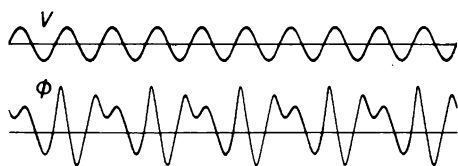


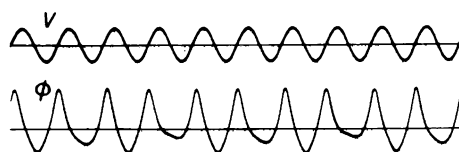
図 4.10 鉄心中の磁束を直流偏極した場合に励起する振動 ($\frac{3}{2}$ 調波振動, $\frac{5}{4}$ 調波振動, $\frac{7}{4}$ 調波振動, および第2高調波振動) の振幅特性.



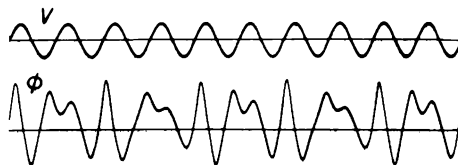
(a) $B_0=0.8$ $B=0.86$



(c) $B_0=0.8$ $B=1.15$



(b) $B_0=0.8$ $B=0.91$



(d) $B_0=0.8$ $B=1.32$

図 4.11 電源電圧 V および鉄心中の各振動磁束 ϕ の波形.

第2部 変圧器結合回路における非線形振動

第5章 変圧器結合回路に発生する定常振動の理論的考察

5.1 緒 言

図5.1に示すような2つの可飽和鉄心を持つ変圧器結合回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する定常振動について考察する。一般に非線形回路に周期的外力を加えると、外力周波数と簡単な整数比をなす周波数成分を持つ同期化した周期振動を生じる場合が多いが、外力に同期化しない概周期振動を発生する場合もある。^{[25]~[30]} 図5.1の振動回路は $\frac{1}{2}$ 調波振動を発生するパラメトリック励振回路として知られている。適当な回路条件では、この回路には $\frac{1}{2}$ 調波振動以外に、 $\frac{1}{3}$ 調波振動、基本調波振動、 $\frac{3}{2}$ 調波振動、第2高調波振動、および第3高調波振動等が発生する。これらの振動は外力周波数と簡単な整数比(m/n)をなす周波数成分を主要成分に持つ外力に同期化した周期振動である。これらの m/n 調波振動の周波数は回路定数のある範囲で変化しても一定である。また、ある回路条件では、外力に同期化しない概周期振動が発生することがある。このとき回路定数を変化するにつれて振動の周波数は連続的に変化し、回路条件によって平均周波数が電源周波数の $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動を発生する場合がある。また平均周波数が1と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動を発生する場合もある。これらの振動の主要周波数成分は共振回路の固有周波数に近い周波数成分であると考えられる。固有周波数は容量の大きさとリアクトルの等価的インダクタンスによって決まり、等価的インダクタンスは振動の振幅に依存すると考えられる。

ここでは、まず振動を記述する微分方程式を誘導する。つぎに解に含まれる主要周波数成分

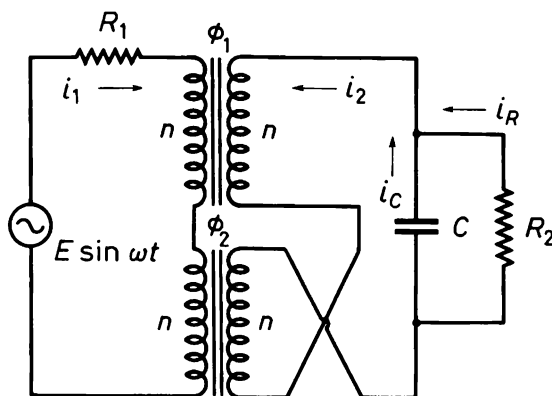


図 5.1 変圧器結合回路。

の決め方を一般的に考察し、調波解析法を適用して定常解を求める。高次の近似解を仮定して計算すれば、外力に同期化した周期振動のみでなく同期化しない概周期振動も解析することができる。またこれらの振動の安定性を考察する。

5.2 基礎方程式

図5.1に示すように2つの可飽和リアクトルの1次側を直列に接続して交番電圧 $E \sin \omega t$ を印加し、2次側は極性を逆に接続して容量 C と共振回路を形成する。図の記号を用いると、回路方程式は

$$\left. \begin{aligned} n \frac{d}{dt} (\phi_1 + \phi_2) + R_1 i_1 &= E \sin \omega t \\ n \frac{d}{dt} (\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{C} \int i_C dt &= 0 \\ R_2 i_R &= \frac{1}{C} \int i_C dt, \quad i_2 = i_R + i_C \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

となる。ここに ϕ_1 および ϕ_2 は各鉄心中の磁束であり、 n は各コイルの巻数である。2つの可飽和リアクトルは同じ磁化特性を持つものとし、つぎのように仮定する。

$$c \phi_1^3 = n i_1 + n i_2, \quad c \phi_2^3 = n i_1 - n i_2 \quad (5.2)$$

ここに c は鉄心の磁化特性による定数である。電流、磁束、および容量を無次元化するために、

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_n u_1, & i_2 &= I_n u_2 \\ \phi_1 &= \Phi_n v_1, & \phi_2 &= \Phi_n v_2 \\ C &= C_n m \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

によって定義される u , v , および m を導入する。ここに I_n , Φ_n , および C_n はそれぞれ電流、磁束、および容量の単位量であり、任意に選ぶことができるが、計算を簡単にするために

$$n \omega^2 C_n \Phi_n = I_n, \quad c \Phi_n^3 = n I_n \quad (5.4)$$

なる関係を設ける。式(5.3)および式(5.4)の關係を用いて式(5.1)を書き直せば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (v_1 + v_2) + k_1 u_1 &= B \sin \tau \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} (v_1 - v_2) + \frac{k_2}{m} \frac{d}{d\tau} (v_1 - v_2) + \frac{1}{m} u_2 = 0 \end{aligned} \right\} (5.5)$$

ここに

$$k_1 = \omega C_n R_1, \quad k_2 = \frac{1}{\omega C_n R_2}, \quad B = \frac{E}{n \omega \Phi_n}, \quad \tau = \omega t \quad \left. \vphantom{\frac{d^2}{d\tau^2}} \right\}$$

となる。式(5.3)および式(5.4)を用いると、式(5.2)は

$$v_1^3 = u_1 + u_2, \quad v_2^3 = u_1 - u_2 \quad (5.6)$$

となる。さらに

$$a = v_1 + v_2, \quad b = v_1 - v_2 \quad (5.7)$$

と置くと、式(5.5)、式(5.6)、および式(5.7)より、 a について1階、 b について2階の連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} + \frac{1}{8} k_1 (a^2 + 3b^2) a &= B \sin \tau \\ \frac{d^2 b}{d\tau^2} + \frac{k_2}{m} \frac{db}{d\tau} + \frac{1}{8m} (3a^2 + b^2) b &= 0 \end{aligned} \right\} (5.8)$$

を得る。

5.3 定常解の仮定^[5, 6, 7]

調波解析法を用いて定常解を求める場合、定常解に含まれる主要周波数成分の選び方が問題となる。ここでは、外力に同期化した周期解および同期化しない概周期解の主要周波数成分の決め方について一般的に考察する。

$k_1 = 0$ および $k_2 = 0$ の場合式(5.8)は

$$\frac{da}{d\tau} = B \sin \tau, \quad \frac{d^2 b}{d\tau^2} + \frac{1}{8m} (3a^2 + b^2) b = 0 \quad (5.9)$$

となる。 ν_0 を共振回路の固有周波数とすると、 ν_0^2 は上式より $(3a^2 + b^2)/(8m)$ の平均値にほぼ等しいと考えられる。 a および b の主要周波数成分はそれぞれ外力周波数1および固有周波数 ν_0 に近い周波数 ν^* の成分であると考え、 a および b の第1次近似として次式を仮定する。

* 固有周波数 ν_0 が外力周波数1と整数比 (m/n) をなす周波数に近い場合、振動が外力に同期化し、主要成分の周波数 ν が m/n となって周期振動となることが多い。なお外力に同期化しない概周期振動の主要成分の周波数 ν (平均周波数)は固有周波数にほぼ等しいと考えられ、一般には外力周波数1と無理数比をなす。

$$a = A_1 \cos \tau, \quad b = B_\nu \sin (\nu \tau + \beta_\nu) \quad (5.10)$$

k_1 および k_2 が比較的小さい場合にも、 a および b の第 1 次近似として式 (5.10) を仮定する。
式 (5.8) を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= B \sin \tau - \frac{1}{8} k_1 (a^2 + 3b^2) a \\ \frac{d^2b}{d\tau^2} &= -\frac{k_2}{m} \frac{db}{d\tau} - \frac{1}{8m} (3a^2 + b^2) b \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

となる。式 (5.10) を式 (5.11) の右辺に代入し両辺をそれぞれ積分すれば

$$\left. \begin{aligned} a &= -B \cos \tau - \frac{1}{8} k_1 \left[\left(\frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} B_\nu^2 \right) A_1 \sin \tau \right. \\ &\quad - \frac{3}{4(1-2\nu)} A_1 B_\nu^2 \sin [(1-2\nu)\tau - 2\beta_\nu] \\ &\quad - \frac{3}{4(1+2\nu)} A_1 B_\nu^2 \sin [(1+2\nu)\tau + 2\beta_\nu] \\ &\quad + \frac{1}{12} A_1^3 \sin 3\tau \left. \right] \\ &\quad + A_0 \\ b &= \frac{k_2}{m} \frac{1}{\nu} B_\nu \cos (\nu \tau + \beta_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{8m} \left[\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{3}{2} A_1^2 + \frac{3}{4} B_\nu^2 \right) B_\nu \sin (\nu \tau + \beta_\nu) \right. \\ &\quad - \frac{3}{4(2-\nu)^2} A_1^2 B_\nu \sin [(2-\nu)\tau - \beta_\nu] \\ &\quad - \frac{3}{4(2+\nu)^2} A_1^2 B_\nu \sin [(2+\nu)\tau - \beta_\nu] \\ &\quad - \frac{1}{36\nu^2} B_\nu^3 \sin (3\nu\tau + 3\beta_\nu) \left. \right] \\ &\quad + B_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

となる。ここに A_0 および B_0 は積分定数である。式 (5.12) では、 a の周波数 1 および b の周波数 ν の成分以外の周波数成分が現れる。これらの周波数成分のうち、振幅の比較的大きな成分のみを考慮して、 a および b の第 2 次近似式をつぎのように仮定する。^{*}

$$\left. \begin{aligned} \nu \leq 1 : \quad a &= A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{1-2\nu} \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_{1-2\nu}] \\ b &= B_\nu \sin(\nu\tau + \beta_\nu) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu > 1 : \quad a &= A_1 \sin(\tau + \alpha_1) \\ b &= B_\nu \sin(\nu\tau + \beta_\nu) + B_{2-\nu} \sin[(2-\nu)\tau + \beta_{2-\nu}] \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

式(5.13)および式(5.14)は次のように書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{式(5.13): } a &= x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau + x_{1-2\nu} \sin(1-2\nu)\tau + y_{1-2\nu} \cos(1-2\nu)\tau \\ b &= x_\nu \sin \nu\tau + y_\nu \cos \nu\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{式(5.14): } a &= x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \\ b &= x_\nu \sin \nu\tau + y_\nu \cos \nu\tau + x_{2-\nu} \sin(2-\nu)\tau + y_{2-\nu} \cos(2-\nu)\tau \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x_s &= A_s \cos \alpha_s, & y_s &= A_s \sin \alpha_s, & (s=1, 1-2\nu) \\ x_s &= B_s \cos \beta_s, & y_s &= B_s \sin \beta_s, & (s=\nu, 2-\nu) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

5.4 主要成分の周波数 ν が1より小さい場合の定常解の考察^[5, 7]

周波数 ν が1より小さい場合に対し外力に同期化した周期振動および同期化しない概周期振動について考察する。一般に調波解析法は周期振動の各周波数成分の振幅および位相角を決定する場合に用いられているが、ここでは調波解析法を用いて周期振動のみでなく概周期振動の定常解も求める。

定常解(5.13)の周波数 ν 、振幅 A_1 、 $A_{1-2\nu}$ 、 B_ν 、位相角 α_1 、 $\alpha_{1-2\nu}$ 、および β_ν を決定するために、式(5.13)を式(5.8)の第1式に代入し、周波数1、および周波数 $1-2\nu$ に等しくなる周波数成分を含む三角関数の係数をそれぞれ零に等しいと置く。また式(5.13)を式(5.8)の第2式に代入し周波数 ν に等しくなる周波数成分を含む三角関数の係数を零に等しいと置く。式(5.13)を式(5.8)に代入して得られる式には表5.1に示す周波数が含まれる。表5.1に示すように周波数 ν が $\frac{1}{3}$ あるいは $\frac{1}{2}$ の場合、周波数 $3-6\nu$ 、 $4\nu-1$ 、あるいは $2-$

* 実験結果においても、式(5.13)あるいは式(5.14)の周波数成分が他の周波数成分に比較して優勢であることが観察された。

5 ν 等のように見掛上周波数 1, $1 - 2 \nu$, あるいは ν と異なる周波数が周波数 1, $1 - 2 \nu$, あるいは ν に等しくなる。また周波数 ν が $\frac{1}{3}$ および $\frac{1}{2}$ 以外の場合には, 周波数 1, $1 - 2 \nu$, あるいは ν に等しくなる周波数はそれぞれ周波数 1, $1 - 2 \nu$, あるいは ν 以外にない。これらの関係を考慮して調波解析を行なう。

表 5.1 式 (5.13) を式 (5.8) に代入して得られる周波数

主要成分周波数 ν	$\nu = \frac{1}{3}$	$\nu = \frac{1}{2}$	$\nu \neq \frac{1}{3}, \nu \neq \frac{1}{2}$
1 に等しくなる周波数	1, $3 - 6 \nu$	1, $3 - 4 \nu, 4 \nu - 1$	1
$1 - 2 \nu$ に等しくなる周波数	$1 - 2 \nu, 4 \nu - 1$	$1 - 2 \nu, 3 - 6 \nu$	$1 - 2 \nu$
ν に等しくなる周波数	$\nu, 2 - 5 \nu$	$\nu, 2 - 3 \nu, 5 \nu - 2$	ν

(1) ν が $\frac{1}{3}$ のとき
式 (5.13) を式 (5.8) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1 + \frac{1}{32} k_1 A_{1-2\nu}^3 \cos \varphi_1 \\ 0 &= Y_1 + \frac{1}{32} k_1 A_{1-2\nu}^3 \sin \varphi_1 \\ 0 &= X_{1-2\nu} + \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu} (A_1 A_{1-2\nu} \cos \varphi_1 - B_\nu^2 \cos \varphi_2) \\ 0 &= Y_{1-2\nu} + \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu} (A_1 A_{1-2\nu} \sin \varphi_1 + B_\nu^2 \sin \varphi_2) \\ \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu + \frac{9}{64m} A_{1-2\nu}^2 B_\nu \sin \varphi_2 \\ B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu + \frac{9}{64m} A_{1-2\nu}^2 B_\nu \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\}$$

(5.18)

ここに

$$\varphi_1 = -\alpha_1 + 3\alpha_{1-2\nu}, \qquad \varphi_2 = -2(\alpha_{1-2\nu} - \beta_\nu)$$

* 定常解に対しては各振幅および位相角は一定値をとるが, 後に定常解の安定性を吟味するために, これらの時間微分も考慮した。なお式 (5.18) を導くにあたり後に述べる近似を行なった。

$$\left.
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{1}{8} k_1 \left[P_1 A_1 - \frac{3}{4} A_{1-2\nu} B_\nu^2 \cos(\alpha_1 - \varphi) \right] + B \cos \alpha_1 \\
Y_1 &= -A_1 - \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu} B_\nu^2 \sin(\alpha_1 - \varphi) - B \sin \alpha_1 \\
X_{1-2\nu} &= -\frac{1}{8} k_1 \left[P_{1-2\nu} A_{1-2\nu} - \frac{3}{4} A_1 B_\nu^2 \cos(\alpha_1 - \varphi) \right] \\
Y_{1-2\nu} &= -(1-2\nu) A_{1-2\nu} + \frac{3}{32} k_1 A_1 B_\nu^2 \sin(\alpha_1 - \varphi) \\
X_\nu &= -\frac{k_2}{2m} B_\nu + \frac{3}{32m\nu} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \sin(\alpha_1 - \varphi) \\
Y_\nu &= \frac{1}{16m\nu} \left[Q_\nu B_\nu - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \cos(\alpha_1 - \varphi) \right] \\
P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{1-2\nu}^2 + B_\nu^2), \quad P_{1-2\nu} = \frac{3}{4} A_{1-2\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_\nu^2) \\
Q_\nu &= \frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1-2\nu}^2) - 8m\nu^2 \\
\varphi &= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu
\end{aligned}
\right\} \quad (5.19)$$

(2) ν が $\frac{1}{2}$ のとき

式 (5.13) を式 (5.8) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
\frac{dA_1}{d\tau} &= X_1 + \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu} (2A_1 A_{1-2\nu} \cos \varphi_3 - B_\nu^2 \cos \varphi_4) \\
0 &= Y_1 + \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu} B_\nu^2 \sin \varphi_4 \\
0 &= X_{1-2\nu} + \frac{3}{32} k_1 A_{1-2\nu}^3 \cos \varphi_3 \\
\frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu - \frac{3}{16m\nu} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \sin \varphi_4 \\
B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu - \frac{3}{16m\nu} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \cos \varphi_4
\end{aligned}
\right\} \quad (5.20)$$

ここに

$$\varphi_3 = 2\alpha_{1-2\nu} = \pi, \quad \varphi_4 = \alpha_1 + \alpha_{1-2\nu} - 2\beta_\nu$$

ただし式 (5.19) の記号を用いた。また後に述べる近似を行なった。

(3) ν が $\frac{1}{3}$ および $\frac{1}{2}$ 以外のとき

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1, & 0 &= Y_1, & 0 &= X_{1-2\nu}, & 0 &= Y_{1-2\nu} \\ \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu, & B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

ただし式 (5.19) の記号を用いた。

なお式 (5.18), 式 (5.20), および式 (5.21) を導くにあたり次の仮定を設けた。

(i) 式 (5.15) の振幅 x_ν および y_ν は時間の経過と共に緩やかに変化するものとし, また k_2 は小さい量とする。従って $d^2 x_\nu/d\tau^2$, $d^2 y_\nu/d\tau^2$, $k_2 dx_\nu/d\tau$, および $k_2 dy_\nu/d\tau$ を無視した。また式 (5.17) の関係を用いて $d^2 B_\nu/d\tau^2$, $B_\nu d^2 \beta_\nu/d\tau^2$, $(dB_\nu/d\tau)(d\beta_\nu/d\tau)$, $B_\nu (d\beta_\nu/d\tau)^2$, $k_2 dB_\nu/d\tau$, および $k_2 B_\nu d\beta_\nu/d\tau$ を無視した。

(ii) さらに k_1 は小さい量とする。従って第 2 次近似解 (5.15) の振幅 x_1 , $x_{1-2\nu}$, および $y_{1-2\nu}$ は第 1 次近似解 (5.10) の振幅 $A_1 (= y_1)$ と比較して小さい。また各振幅は時間の経過と共に緩やかに変化するものとする。従って $dx_1/d\tau$, $dx_{1-2\nu}/d\tau$, および $dy_{1-2\nu}/d\tau$ を無視した。また式 (5.17) の関係を用いて $A_1 d\alpha_1/d\tau$, $dA_{1-2\nu}/d\tau$, および $A_{1-2\nu} d\alpha_{1-2\nu}/d\tau$ を無視した。なお式 (5.21) を導くにあたり周波数 ν は時間の経過と共に緩やかに変化するものとし, その時間微分を無視した。

(a) 周期解

定常状態では式 (5.18) および式 (5.20) において

$$\frac{dA_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dB_\nu}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\beta_\nu}{d\tau} = 0 \quad (5.22)$$

となる。周波数 ν が $\frac{1}{3}$ あるいは $\frac{1}{2}$ の場合, 式 (5.8) の周期解は式 (5.13) で示される。系のパラメタ B , k_1 , k_2 , および m を適当に与えると, 式 (5.18) あるいは式 (5.20) より周期解 (5.13) の振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , 位相角 α_1 , $\alpha_{1-2\nu}^*$, および β_ν がすべて求まる。周波数 ν がある一定の値 ($\frac{1}{3}$ あるいは $\frac{1}{2}$) に対し, 解 (5.13) が系のパラメタ B , k_1 , k_2 , および m のある範囲内で求まるので, その範囲内で解 (5.13) が外力に同期化する領域のあることが判る。

なお式 (5.17) を用いて各振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , 位相角 α_1 , $\alpha_{1-2\nu}$, および β_ν を振幅 x_1 ,

* $\nu = \frac{1}{2}$ の場合には $\alpha_{1-2\nu} = \pi/2$ である。

$y_1, x_{1-2\nu}, y_{1-2\nu}, x_\nu$, および y_ν に書き換えると, 式 (5.18) および式 (5.20) より次式を得る。

(1) ν が $\frac{1}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}
 0 &= y_1 - \frac{1}{8} k_1 \left[P_1 x_1 - \frac{1}{4} \{ (3P_3 + P_5) x_{1-2\nu} - (3P_4 + P_6) y_{1-2\nu} \} \right] + B \equiv X_{\frac{1}{3}, 1} \\
 \frac{dy_1}{d\tau} &= -x_1 - \frac{1}{8} k_1 \left[P_1 y_1 - \frac{1}{4} \{ (3P_4 + P_6) x_{1-2\nu} + (3P_3 + P_5) y_{1-2\nu} \} \right] \equiv Y_{\frac{1}{3}, 1} \\
 0 &= \frac{1}{3} y_{1-2\nu} - \frac{1}{8} k_1 \left[P_2 x_{1-2\nu} - \frac{3}{4} \{ (P_3 + P_5) x_1 + (P_4 + P_6) y_1 \right. \\
 &\quad \left. - P_3 x_{1-2\nu} - P_4 y_{1-2\nu} \} \right] \equiv X_{\frac{1}{3}, 1-2\nu} \\
 0 &= -\frac{1}{3} x_{1-2\nu} - \frac{1}{8} k_1 \left[P_2 y_{1-2\nu} + \frac{3}{4} \{ (P_4 + P_6) x_1 - (P_3 + P_5) y_1 \right. \\
 &\quad \left. + P_4 x_{1-2\nu} - P_3 y_{1-2\nu} \} \right] \equiv Y_{\frac{1}{3}, 1-2\nu} \\
 \frac{dx_\nu}{d\tau} &= \frac{1}{2\nu} \left[-\frac{k_2}{m} \nu x_\nu - \frac{1}{8m} \{ P_7 y_\nu + \frac{3}{2} (P_8 + \frac{1}{2} P_6) x_\nu + \frac{3}{2} (P_9 - \frac{1}{2} P_5) y_\nu \} \right] \equiv X_{\frac{1}{3}, \nu} \\
 \frac{dy_\nu}{d\tau} &= \frac{1}{2\nu} \left[-\frac{k_2}{m} \nu y_\nu + \frac{1}{8m} \{ P_7 x_\nu - \frac{3}{2} (P_9 - \frac{1}{2} P_5) x_\nu + \frac{3}{2} (P_8 + \frac{1}{2} P_6) y_\nu \} \right] \equiv Y_{\frac{1}{3}, \nu}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (A_{1-2\nu}^2 + B_\nu^2), & P_2 &= \frac{3}{4} A_{1-2\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_\nu^2) \\
 P_3 &= x_\nu^2 - y_\nu^2, & P_4 &= 2x_\nu y_\nu \\
 P_5 &= x_{1-2\nu}^2 - y_{1-2\nu}^2, & P_6 &= 2x_{1-2\nu} y_{1-2\nu} \\
 P_7 &= \frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1-2\nu}^2) - 8m\nu^2, & P_8 &= x_1 y_{1-2\nu} - y_1 x_{1-2\nu} \\
 P_9 &= x_1 x_{1-2\nu} + y_1 y_{1-2\nu}, & A_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 \\
 A_{1-2\nu}^2 &= x_{1-2\nu}^2 + y_{1-2\nu}^2, & B_\nu^2 &= x_\nu^2 + y_\nu^2
 \end{aligned}$$

(2) ν が $\frac{1}{2}$ のとき

$$0 = y_1 - \frac{1}{8} k_1 [P_1 x_1 + \frac{3}{2} P_4 y_{1-2\nu}] + B \equiv X_{1/2, 1}$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -x_1 - \frac{1}{8} k_1 [P_1 y_1 - \frac{3}{2} P_3 y_{1-2\nu}] \equiv Y_{1/2, 1}$$

$$0 = -\frac{1}{8} k_1 [P_2 y_{1-2\nu} + \frac{3}{4} (P_4 x_1 - P_3 y_1)] \equiv Y_{1/2, 1-2\nu}$$

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2\nu} [-\frac{k_2}{m} \nu x_\nu - \frac{1}{8m} \{P_5 y_\nu + 3P_6 y_{1-2\nu}\}] \equiv X_{1/2, \nu}$$

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2\nu} [-\frac{k_2}{m} \nu y_\nu + \frac{1}{8m} \{P_5 x_\nu - 3P_6 y_{1-2\nu}\}] \equiv Y_{1/2, \nu}$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} B_\nu^2 + 3 A_{1-2\nu}^2, \quad P_2 = A_{1-2\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_\nu^2)$$

$$P_3 = x_\nu^2 - y_\nu^2, \quad P_4 = 2x_\nu y_\nu$$

$$P_5 = \frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_{1-2\nu}^2 - 8m\nu^2, \quad P_6 = x_1 x_\nu + y_1 y_\nu$$

$$P_7 = y_1 x_\nu - x_1 y_\nu, \quad A_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$A_{1-2\nu} = y_{1-2\nu}, \quad B_\nu^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2$$

(5.24)

定常状態では $dy_1/d\tau = 0$, $dx_\nu/d\tau = 0$, $dy_\nu/d\tau = 0$ となる。式 (5.24) より, $x_1, y_1, y_{1-2\nu}, x_\nu$, および y_ν を消去すると次式を得る。

$$[(1 + \frac{1}{4} k_1 k_2 \frac{B_{1/2}^2}{A_1^2})^2 + \frac{1}{64} k_1^2 (P_1 - \frac{1}{2} \frac{B_{1/2}^2}{A_1^2} Q_{1/2})^2] A_1^2 = B^2$$

$$(16 k_2^2 + Q_{1/2}^2 - A_1^2 A_0^2) B_{1/2}^2 = 0$$

$$Q_{1/2} B_{1/2}^2 - 4 P_0 A_0^2 = 0$$

(5.25)

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + 3 A_0^2 + \frac{3}{2} B_{1/2}^2, \quad P_0 = A_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_{1/2}^2)$$

$$Q_{1/2} = \frac{3}{4} B_{1/2}^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3 A_0^2 - 2m$$

式 (5.25) より振幅 A_1 , A_0 , および $B_{1/2}$ が求められる。

(b) 概周期解^[5, 7]

周波数 ν が $1/3$ および $1/2$ 以外の場合, 式 (5.8) の概周期解は式 (5.13) で示される。式 (5.13) を式 (5.8) に代入し調波解析を行なって式 (5.21) を得た。式 (5.21) を書き換えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1, & 0 &= X_{1-2\nu}, & \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu \\ 0 &= \frac{Y_1}{A_1}, & 0 &= \frac{Y_{1-2\nu}}{A_{1-2\nu}}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{X_{1-2\nu}}{A_{1-2\nu}} + 2 \frac{X_\nu}{B_\nu} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

ここに

$$\varphi = \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu$$

となる。定常状態では式 (5.26) において $dA_1/d\tau = 0$, $dB_\nu/d\tau = 0$, $d\varphi/d\tau = 0$ となる。この場合式 (5.26) は 7 個の未知数 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , α_1 , $\alpha_{1-2\nu}$, β_ν , ν に関する 6 個の代数方程式であるから, 式 (5.26) より 7 個の未知数の全ては確定しない。しかし概周期解 (5.13) の各振幅, 位相角, および周波数 ν を記述する式 (5.26) は, 位相角については α_1 および $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$ によって表わされ, 位相角 $\alpha_{1-2\nu}$ あるいは β_ν は概周期解とは独立に任意の値をとることができる。式 (5.26) では振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , 位相角 α_1 , $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, および周波数 ν が未知数である。従って系のパラメタ B , k_1 , k_2 , および m を適当に与えると, 式 (5.26) より振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , 位相角 α_1 , $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, 周波数 ν は定まる。しかし位相角 $\alpha_{1-2\nu}$ および β_ν は定まらない。またパラメタ B , k_1 , k_2 , あるいは m を変えると, 周波数 ν もそれにつれて連続的に変化するので, 周波数 ν が $1/3$ および $1/2$ 以外では解 (5.13) は外力に同期化する領域のないことが判る。^{*} なお式 (5.26) より位相角 α_1 および $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$ を消去すれば次式を得る。

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2} k_1 k_2 \nu \frac{B_\nu^2}{A_1^2} \right)^2 + \frac{1}{64} k_1^2 \left(P_1 - \frac{1}{2} Q_\nu \frac{B_\nu^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B^2$$

$$2 P_{1-2\nu} A_{1-2\nu}^2 = Q_\nu B_\nu^2$$

$$2 (1 - 2\nu) A_{1-2\nu}^2 = k_1 k_2 \nu B_\nu^2$$

^{*} 実験結果によれば, 比較的広い同期化領域を持つ振動は $1/3$ 調波振動および $1/2$ 調波振動である。

$$(8k_2\nu)^2 + Q_\nu^2 = \left(\frac{3}{2}A_1A_{1-2\nu}\right)^2 \quad (5.27)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4}A_1^2 + \frac{3}{2}(A_{1-2\nu}^2 + B_\nu^2), \quad P_{1-2\nu} = \frac{3}{4}A_{1-2\nu}^2 + \frac{3}{2}(A_1^2 + B_\nu^2)$$

$$Q_\nu = \frac{3}{4}B_\nu^2 + \frac{3}{2}(A_1^2 + A_{1-2\nu}^2) - 8m\nu^2$$

式(5.27)より周波数 ν 、振幅 A_1 、 $A_{1-2\nu}$ 、および B_ν が決定される。また式(5.26)より位相角 α_1 および $\varphi(=\alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$ に関して次式を得る。

$$\sin\alpha_1 = -\left(1 + \frac{1}{2}k_1k_2\nu\frac{B_\nu^2}{A_1^2}\right)A_1/B$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{8}k_1\left(P_1 - \frac{1}{2}Q_\nu\frac{B_\nu^2}{A_1^2}\right)A_1/B$$

$$\sin(\alpha_1 - \varphi) = \frac{16}{3}k_2\nu/(A_1A_{1-2\nu})$$

$$\cos(\alpha_1 - \varphi) = \frac{2}{3}Q_\nu/(A_1A_{1-2\nu}) \quad (5.28)$$

5.5 定常解の安定性 ($\nu < 1$ の場合)

前節においては、外力に同期化した周期解と同期化しない概周期解について考察した。この節ではこれらの周期解および概周期解の安定性を考察する。特に概周期解についてはその振幅の安定性を検討する。

(a) 周期解の安定性 ($\nu = 1/3$ あるいは $1/2$ の場合)

—— 時間の周期関数を係数に持つ変分方程式による解析 ——

周波数 ν が $1/3$ あるいは $1/2$ の場合式(5.8)の周期解は式(5.13)で示される。周期解(5.13)の安定性を吟味するために、この周期解を $a_0(\tau)$ および $b_0(\tau)$ で表わし、それからの微小変分 $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ を考える。変分 $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ が時間の経過と共に零に収束すれば周期解は安定であり、発散すれば周期解は不安定である。 $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ を

$$a(\tau) = a_0(\tau) + \xi(\tau), \quad b(\tau) = b_0(\tau) + \eta(\tau) \quad (5.29)$$

によって定義する。式(5.29)を式(5.8)に代入し $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ の2次以上の項を無視する

と次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{8} k_1 [(a_0^2 + b_0^2) \xi + 2a_0 b_0 \eta] &= 0 \\
 \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \frac{k_2}{m} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{3}{8m} [2a_0 b_0 \xi + (a_0^2 + b_0^2) \eta] &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 a_0 &= A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{1-2\nu} \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_{1-2\nu}] \\
 b_0 &= B_\nu \sin(\nu\tau + \beta_\nu), \quad (\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

式(5.30)は時間の周期関数を係数に持つ連立線形微分方程式である。周波数 ν が $\frac{1}{3}$ あるいは $\frac{1}{2}$ のとき、係数の周期 L はそれぞれ 3π あるいは 4π である。 $d\eta/d\tau = \zeta$ とおくと、式(5.30)は次の3元連立1階の線形微分方程式に書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= -\frac{3}{8} k_1 [(a_0^2 + b_0^2) \xi + 2a_0 b_0 \eta] \\
 \frac{d\eta}{d\tau} &= \zeta \\
 \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\frac{3}{8m} [2a_0 b_0 \xi + (a_0^2 + b_0^2) \eta] - \frac{k_2}{m} \zeta
 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

周期係数を持つ線形常微分方程式の一般論によれば、式(5.31)は

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^{(i)}(\tau + L) &= m_i \xi^{(i)}(\tau) \\
 \eta^{(i)}(\tau + L) &= m_i \eta^{(i)}(\tau) \\
 \zeta^{(i)}(\tau + L) &= m_i \zeta^{(i)}(\tau)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

なる関係を満たす3組の独立な基本解を持つ。ここに m_i は特性乗数と称する定数で、式(5.31)の特性方程式の根として得られる。^[32] 3組の独立な初期条件

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_1(0) &= 1 & \xi_2(0) &= 0 & \xi_3(0) &= 0 \\
 \eta_1(0) &= 0 & \eta_2(0) &= 1 & \eta_3(0) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

$$\zeta_1(0) = 0 \qquad \zeta_2(0) = 0 \qquad \zeta_3(0) = 1$$

を持つ3組の解を $(\xi_i(\tau), \eta_i(\tau), \zeta_i(\tau))$, $(i = 1, 2, 3)$ とすると, 式(5.31)で表わされる系の特性方程式は次式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} \xi_1(L) - m & \xi_2(L) & \xi_3(L) \\ \eta_1(L) & \eta_2(L) - m & \eta_3(L) \\ \zeta_1(L) & \zeta_2(L) & \zeta_3(L) - m \end{vmatrix} = 0 \quad (5.34)$$

特性乗数 m_i , $(i = 1, 2, 3)$ を用いて

$$m_i = e^{\mu_i L} \quad (5.35)$$

で定義される μ_i を導入すると基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau), \zeta^{(i)}(\tau))$ は

$$\xi^{(i)}(\tau) = e^{\mu_i \tau} \phi_1^{(i)}, \quad \eta^{(i)}(\tau) = e^{\mu_i \tau} \phi_2^{(i)}, \quad \zeta^{(i)}(\tau) = e^{\mu_i \tau} \phi_3^{(i)} \quad (5.36)$$

なる形で表わされる。^[2]ここに μ_i は特性指数と称する定数であり, 式(5.35)より

$$\mu_i = \frac{1}{L} \log m_i = \frac{1}{L} \log |m_i| e^{j(\theta_i + 2n\pi)} \quad (5.37)$$

となる。ただし, θ_i は $\arg m_i$, $\angle m_i$ である。また $\phi_j^{(i)}(\tau)$, $(i, j = 1, 2, 3)$ は式(5.31)の係数の周期 L に等しい周期の周期関数である。

式(5.31)の一般解は線形微分方程式の性質により互に独立な3組の基本解を用いて

$$\xi(\tau) = \sum_{i=1}^3 c_i \xi^{(i)}(\tau), \quad \eta(\tau) = \sum_{i=1}^3 c_i \eta^{(i)}(\tau), \quad \zeta(\tau) = \sum_{i=1}^3 c_i \zeta^{(i)}(\tau) \quad (5.38)$$

と表わされる。ここに c_1, c_2 , および c_3 は任意定数である。したがって特性乗数 m_i , $(i = 1, 2, 3)$ の絶対値が1つでも1より大きいとき, それに対応する基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau), \zeta^{(i)}(\tau))$ は時間の経過と共に発散して不安定となり, 式(5.31)の解(5.38)は不安定となる。また特性乗数 m_i の絶対値がすべて1より小ならば, 基本解 $(\xi^{(i)}(\tau), \eta^{(i)}(\tau), \zeta^{(i)}(\tau))$ は時間の経過と共に零に収束し, 式(5.31)の解(5.38)は安定である。よって特性乗数の絶対値を調べるにより周期解の安定性を吟味することができる。周波数 ν が $\frac{1}{3}$ および $\frac{1}{2}$ の場合の周期解(5.13)および ξ , η , および ζ の特性乗数の数値例を第5.5(c)節に示す。

(b) 定数係数を持つ変分方程式の誘導

周期係数を持つ変分方程式 (5.31) の解の安定性を調べるためには、式 (5.31) を一周期数値積分しなければならない。後に述べるように、基本解 $(e^{\mu_i} \phi_j^{(i)}(\tau), i, j = 1, 2, 3)$ の周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ を用いて周期係数線形微分方程式 (5.31) を定数係数線形微分方程式に変換することができる。この定数係数線形微分方程式の解の安定性は代数方程式である特性方程式の根を調べることにより吟味することができる。すなわち Routh-Hurwitz の安定条件を用いることもできる。しかし一般に周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ を求めるためには計算機などを用いて周期係数を持つ変分方程式 (5.31) を解かなければならない。ここでは周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ の周波数成分を仮定することにより定数係数を持つ変分方程式を導き、解の安定性を吟味する。この場合は仮定した周波数成分のみの安定性を調べるので、周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ の周波数成分を仮定することにより導かれた定数係数を持つ変分方程式による安定条件は周期係数を持つ変分方程式 (5.31) による安定条件の一部であると考えられる。以下にもう少し詳しく述べる。

周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ を用いて変数 $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, および $\zeta(\tau)$ を

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \phi_1^{(1)} u + \phi_1^{(2)} v + \phi_1^{(3)} w \\ \eta &= \phi_2^{(1)} u + \phi_2^{(2)} v + \phi_2^{(3)} w \\ \zeta &= \phi_3^{(1)} u + \phi_3^{(2)} v + \phi_3^{(3)} w \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

で定義される変数 $u(\tau)$, $v(\tau)$, および $w(\tau)$ に変換すると、周期係数を持つ変分方程式 (5.31) は定数係数線形微分方程式

$$\frac{du}{d\tau} = \mu_1 u, \quad \frac{dv}{d\tau} = \mu_2 v, \quad \frac{dw}{d\tau} = \mu_3 w \quad (5.40)$$

となる。^{*[32]} 式 (5.40) で表わされる系の特性根は変分方程式 (5.31) の特性指数である。ここで式 (5.39) における周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ を求めるためには、既に述べたように周期係数を持つ変分方程式 (5.31) を解き、その解を求めなければならない。ここでは式 (5.39) の周期関数 $\phi_j^{(i)}(\tau)$ が周期解 (5.15) と同じ周波数成分のみを持つ場合を考え、変分方程式 (5.30) の解を

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u_1 \sin \tau + v_1 \cos \tau + u_{1-2\nu} \sin (1-2\nu) \tau + v_{1-2\nu} \cos (1-2\nu) \tau \\ \eta &= u_\nu \sin \nu \tau + v_\nu \cos \nu \tau \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

* 付録Ⅱにおいて式 (5.40) を誘導する。

と仮定する。式 (5.41) を変分方程式 (5.30) に代入し、調波解析を行なうと、次の定数係数を持つ線形微分方程式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_{1-2\nu} \\ v_{1-2\nu} \\ u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

ここに a_{ij} , ($i, j = 1 \sim 6$) は式 (5.23) あるいは式 (5.24) より得られる

$$\frac{\partial (X_{s,1}, Y_{s,1}, X_{s,1-2\nu}, Y_{s,1-2\nu}, X_{s,\nu}, Y_{s,\nu})}{\partial (x_1, y_1, x_{1-2\nu}, y_{1-2\nu}, x_\nu, y_\nu)}, \quad (s = 1/3, 1/2)$$

の対応する要素である。ただし式 (5.42) を導くにあたり次の仮定を設けた。

(i) u_ν および v_ν は時間の経過と共に緩やかに変化するものであり、また k_2 は小さい量とする。従って $d^2 u_\nu / d\tau^2$, $d^2 v_\nu / d\tau^2$, $k_2 du_\nu / d\tau$, および $k_2 dv_\nu / d\tau$ を無視した。

(ii) さらに解 (5.41) の各周波数成分の振幅についても周期解 (5.15) の各周波数成分の振幅の間の関係と同様に、振幅 u_1 , $u_{1-2\nu}$, および $v_{1-2\nu}$ は振幅 v_1 に比較して小さいものとする。また振幅 u_1 , $u_{1-2\nu}$, および $v_{1-2\nu}$ は時間の経過と共に緩やかに変化するものとする。従って $du_1 / d\tau$, $du_{1-2\nu} / d\tau$, および $dv_{1-2\nu} / d\tau$ を無視した。

式 (5.42) は周期解 (5.15) の各振幅の定常値からの変分に関する方程式と一致する。このことを確かめるため、次式で定義される周期解 (5.15) の各振幅の定常値 x_s および y_s , ($s = 1, 1-2\nu, \nu$) からの微小変分 u_s および v_s を考える。

$$x_s(\tau) = x_s + u_s(\tau), \quad y_s(\tau) = y_s + v_s(\tau), \quad (s = 1, 1-2\nu, \nu) \quad (5.43)$$

式 (5.43) を式 (5.23) あるいは式 (5.24) に代入し、 $u_s(\tau)$ および $v_s(\tau)$ の 2 次以上の項を無視すると、変分方程式 (5.42) を得る。

周期解 (5.15) からの変分 ξ および η に関する変分方程式 (5.30) の解が周期解 (5.15) と同じ周波数成分のみを持つ場合を考え、周期係数を持つ変分方程式 (5.30) の解を式 (5.41) のように仮定することにより定数係数を持つ変分方程式 (5.42) を導いた。従って周期解 (5.15) の各振幅の定常値からの変分 u_s および v_s に関する変分方程式 (5.42) による Routh-Hurwitz

の安定条件は周期解 (5.15) からの変分 ξ および η に関する変分方程式 (5.30) による安定条件の一部分であると考えられる。

式 (5.42) で表わされる系の特性方程式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} - \lambda & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.44)$$

あるいは

$$b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0 \quad (5.45)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ b_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{46} \\ a_{61} & a_{63} & a_{64} & a_{66} \end{vmatrix} \\ b_3 &= -(A_{22} + A_{55} + A_{66}) \\ b_4 &= |A| \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

である。ただし A は a_{ij} , ($i, j = 1 \sim 6$) を要素とする行列であり, A_{ij} は行列式 $|A|$ における a_{ij} の余因子である。

変分方程式 (5.42) の特性根 λ_i , ($i = 1, 2, 3$) の実数部がすべて負であれば, 変分 u_s および v_s , ($s = 1, 1-2\nu, \nu$) は時間の経過と共に零に収束し, 周期解 (5.15) は安定である。また特性根 λ_i の少なくとも 1 つ実数部が正ならば, 変分 u_s および v_s , ($s = 1, 1-2\nu, \nu$) は

発散し、周期解 (5.15) は不安定である。

(c) 概周期解の安定性 ^[5,6,7,31]

第 5.4 (b) 節において周波数 ν が $1/3$ および $1/2$ などの簡単な整数比以外の場合、式 (5.8) の解 (5.13) は概周期解となることを述べた。既に第 5.4 (b) 節で述べたように、概周期解 (5.13) の各振幅、位相角、および周波数 ν を記述する式 (5.26) は、位相角については α_1 および φ ($=\alpha_{1-2\nu}+2\beta_\nu$) で表わされるので、6 個の未知数 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu, \alpha_1, \varphi$ ($=\alpha_{1-2\nu}+2\beta_\nu$), および ν で表わされている。ここで以下の式の表現を簡単にするために式 (5.26) の記号を次のように書き換える。

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_\nu \\ \varphi \\ A_{1-2\nu} \\ \alpha_1 \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_\nu \\ Y_{1-2\nu}/A_{1-2\nu} + 2Y_\nu/B_\nu \\ X_{1-2\nu} \\ Y_1/A_1 \\ Y_{1-2\nu}/A_{1-2\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

式 (5.47) の記号を用いると式 (5.26) は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= X_3(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ 0 &= X_4(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ 0 &= X_5(x_1, x_2, \dots, x_6) \\ 0 &= X_6(x_1, x_2, \dots, x_6) \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

定常状態では式 (5.48) において $dx_i/d\tau = 0$, ($i = 1 \sim 3$) すなわち

$$X_i(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0, \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.49)$$

となる。概周期解 (5.13) の安定性を吟味するために、次式で定義される各振幅、位相角、および周波数の定常値 x_1, x_2, \dots, x_6 からの変分 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ を考える。

$$x_i(\tau) = x_i + \xi_i(\tau), \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.50)$$

変分 $\xi_i(\tau)$, ($i = 1 \sim 6$) が時間の経過と共に零に収束すれば、概周期解 (5.13) は各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 $\alpha_1, \varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, 周波数 ν に関して安定である。式 (5.50) を式 (5.48) に代入し $\xi_i(\tau)$, ($i = 1 \sim 6$) の 2 次以上の項を無視すると次の変分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau} &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{16}\xi_6 \\ \frac{d\xi_2}{d\tau} &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{26}\xi_6 \\ \frac{d\xi_3}{d\tau} &= a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + \dots + a_{36}\xi_6 \\ 0 &= a_{41}\xi_1 + a_{42}\xi_2 + \dots + a_{46}\xi_6 \\ 0 &= a_{51}\xi_1 + a_{52}\xi_2 + \dots + a_{56}\xi_6 \\ 0 &= a_{61}\xi_1 + a_{62}\xi_2 + \dots + a_{66}\xi_6 \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

ここに

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1 \sim 6) \quad (5.52)$$

ただし、式 (5.49) の記号を用いた。式 (5.51) において

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda\tau}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda\tau}, \quad \dots, \quad \xi_6 = C_6 e^{\lambda\tau} \quad (5.53)$$

と置く。式 (5.53) を式 (5.51) に代入すると C_1, C_2, \dots, C_6 を定める次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) C_1 + a_{12} C_2 + a_{13} C_3 + a_{14} C_4 + a_{15} C_5 + a_{16} C_6 &= 0 \\ a_{21} C_1 + (a_{22} - \lambda) C_2 + a_{23} C_3 + a_{24} C_4 + a_{25} C_5 + a_{26} C_6 &= 0 \\ a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + (a_{33} - \lambda) C_3 + a_{34} C_4 + a_{35} C_5 + a_{36} C_6 &= 0 \\ a_{41} C_1 + a_{42} C_2 + a_{43} C_3 + a_{44} C_4 + a_{45} C_5 + a_{46} C_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

$$a_{51} C_1 + a_{52} C_2 + a_{53} C_3 + a_{54} C_4 + a_{55} C_5 + a_{56} C_6 = 0$$

$$a_{61} C_1 + a_{62} C_2 + a_{63} C_3 + a_{64} C_4 + a_{65} C_5 + a_{66} C_6 = 0$$

式 (5.54) が $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_6 = 0$ 以外の解を持つためには

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

でなければならない。特性方程式 (5.55) の根を λ_1, λ_2 , および λ_3 とし, これらは互いに異なるものとする。式 (5.54) において $\lambda = \lambda_1$ とすれば, $C_1 : C_2 : \dots : C_6$ の比が決まり

$$\frac{C_{11}}{D_{11}(\lambda_1)} = \frac{C_{21}}{D_{12}(\lambda_1)} = \dots = \frac{C_{61}}{D_{16}(\lambda_1)} \quad (5.56)$$

となる。^[33] ここに $D_{ik}(\lambda_1)$ は $\Delta(\lambda_1)$ の (i, k) 要素の余因子を表わす。ただし $\lambda = \lambda_1$ に対し式 (5.54) を満足する (C_1, C_2, \dots, C_6) を $(C_{11}, C_{21}, \dots, C_{61})$ で表わした。 $\lambda = \lambda_j, (j = 2, 3)$ に対しても $\lambda = \lambda_1$ の場合と同様に式 (5.54) より $C_1 : C_2 : \dots : C_6$ の比が決まる。 $\lambda = \lambda_j, (j = 1, 2, 3)$ に対して式 (5.54) を満足する (C_1, C_2, \dots, C_6) を $(C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{6j})$ で表わせば $\xi_{1j} = C_{1j} e^{\lambda_j \tau}, \xi_{2j} = C_{2j} e^{\lambda_j \tau}, \dots, \xi_{6j} = C_{6j} e^{\lambda_j \tau}, (j = 1, 2, 3)$ が式 (5.51) の 3 組の解となる。式 (5.51) の一般解は

$$\xi_i = C_{i1} e^{\lambda_1 \tau} + C_{i2} e^{\lambda_2 \tau} + C_{i3} e^{\lambda_3 \tau}, \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.57)$$

である。ここに $\lambda = \lambda_j, (j = 1, 2, 3)$ に対し式 (5.54) より $C_{1j} : C_{2j} : \dots : C_{6j}$ の比が決まるので, 式 (5.57) において任意定数を 3 つ選ぶことができる。式 (5.57) より特性方程式 (5.55) の根 $\lambda_j, (j = 1, 2, 3)$ の実数部がすべて負ならば, 式 (5.13) の各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 $\alpha_1, \varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, および周波数 ν の定常値からの変分 $\xi_i (i = 1 \sim 6)$ は時間の経過と共に零に収束し, 概周期解 (5.13) は各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 $\alpha_1, \varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, および周波数 ν に関して安定である。

なお既に第 5.4 (b) 節で述べたように、概周期解 (5.13) の各振幅、位相角、および周波数を記述する式 (5.26) は、位相角については α_1 および $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$ によって表わされるので、位相角 $\alpha_{1-2\nu}$ あるいは β_ν は概周期解とは独立に任意の値をとることができる。

さらに外力の振幅 B と概周期解 (5.13) の各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 $\alpha_1, \varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, 周波数 ν の関係を示す特性曲線が垂直接線を持つ点で安定限界となることを説明する。

まず外力の振幅 B と概周期解 (5.13) の各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 α_1, φ , 周波数 ν の関係を考える。定常状態では式 (5.48) より

$$X_i(B, x_1, x_2, \dots, x_6) = 0, \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.58)$$

となる。ただし式 (5.47) の記号を用いて各振幅、位相角、および周波数を x_j , ($j = 1 \sim 6$) で表わした。式 (5.58) より B を与えると x_j , ($j = 1 \sim 6$) が決まり、振幅特性曲線および周波数特性曲線 (Bx_j の関係) を求めることができる。式 (5.58) より次式を得る。

$$\frac{\partial X_i}{\partial B} dB + \frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_6} dx_6 = 0, \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.59)$$

式 (5.59) を書き換えると

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dB} + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_6} \frac{dx_6}{dB} = - \frac{\partial X_i}{\partial B}, \quad (i = 1 \sim 6) \quad (5.60)$$

となる。式 (5.60) より dx_j/dB , ($j = 1 \sim 6$) を求めると

$$\frac{dx_j}{dB} = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial X_1}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial X_2}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_6}{\partial x_1} & \frac{\partial X_6}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial X_6}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_6}{\partial x_6} \end{vmatrix} \quad (5.61)$$

ここに

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_6}{\partial x_1} & \frac{\partial X_6}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_6}{\partial x_6} \end{vmatrix} \quad (5.62)$$

を得る。つぎに Routh-Hurwitz の安定条件より

$$A = A(0) = 0 \quad (5.63)$$

なる点では安定限界となる。ただし式 (5.63) において式 (5.55) の記号を用いた。従って振幅特性曲線および周波数特性曲線 (Bx_j の関係) が垂直接線 ($dx_j/dB \rightarrow \infty$) を有する点で安定限界 ($A(0) = 0$) となる。

数 値 例

$\frac{1}{3}$ 調波解あるいは $\frac{1}{2}$ 調波解は式 (5.13) で示される。ただし ν は $\frac{1}{3}$ あるいは $\frac{1}{2}$ である。 $\frac{1}{3}$ 調波解および $\frac{1}{2}$ 調波解の振幅特性をそれぞれ式 (5.18) および式 (5.20) より求め、その結果を図 5.2 および図 5.3 に示す。系のパラメタは

$$\text{図 5.2 : } \quad k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.3, \quad m = 10 \quad (5.64)$$

$$\text{図 5.3 : } \quad k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.1, \quad m = 4.0 \quad (5.65)$$

である。図において a の振幅は b が振動している範囲でのみ示した。第 5.5 (a) 節の考察に従い周期係数を持つ変分方程式 (5.31) の解の特性乗数 m_i , ($i = 1, 2, 3$) を求め、周期解の安定性を吟味した。実線の部分で安定であり破線の部分で不安定である。

$B = 1.55$ の場合の $\frac{1}{3}$ 調波解 (5.13) および周期係数を持つ変分方程式 (5.31) で表わされる系の特性乗数 m_i , ($i = 1, 2, 3$) を表 5.2 に示す。また $B = 1.10$ の場合の $\frac{1}{2}$ 調波解 (5.13) および周期係数を持つ変分方程式 (5.31) で表わされる系の特性乗数 m_i , ($i = 1, 2, 3$) を表 5.3 に示す。

固有周波数 ν が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期解 (5.13) の振幅特性および周波数特性を式 (5.26) より求め、その結果を図 5.4 に示す。系のパラメタは

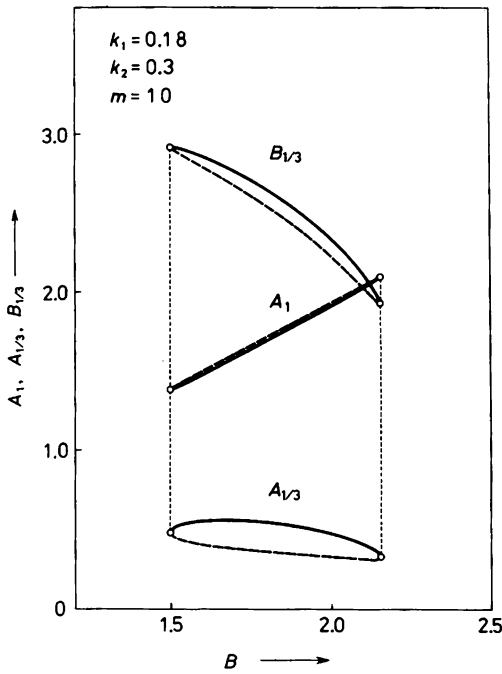


図 5.2 $\frac{1}{3}$ 調波振動の振幅特性.

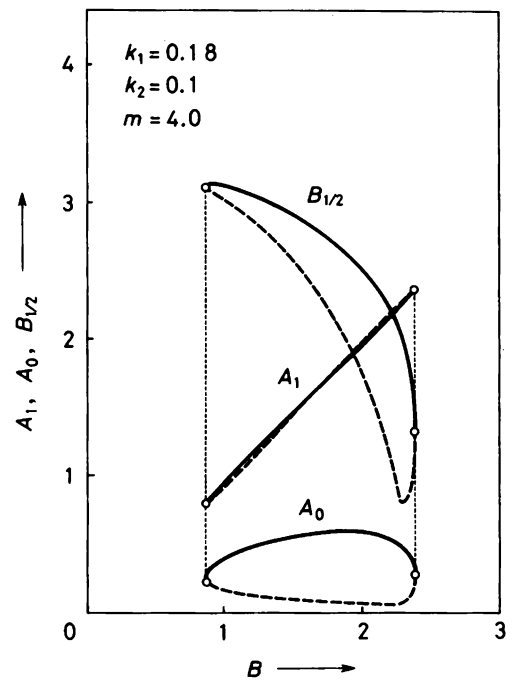


図 5.3 $\frac{1}{2}$ 調波振動の振幅特性.

表 5.2 $\frac{1}{3}$ 調波解と変分方程式 (5.31) の解の特性乗数

B	$a_0(\tau),$ $b_0(\tau)$	m_1, m_2, m_3	
1.55	$a_0 = -0.3904 \sin \tau - 1.3771 \cos \tau$ $- 0.1664 \sin \frac{1}{3}\tau - 0.5056 \cos \frac{1}{3}\tau$ $b_0 = 2.8501 \sin \frac{1}{3}\tau - 0.4864 \cos \frac{1}{3}\tau$	0.9199×10^{-3} $0.4620 \pm 0.6628i$	stable
1.55	$a_0 = 0.3944 \sin \tau - 1.3850 \cos \tau$ $- 0.3457 \sin \frac{1}{3}\tau + 0.2498 \cos \frac{1}{3}\tau$ $b_0 = 2.1481 \sin \frac{1}{3}\tau + 1.8711 \cos \frac{1}{3}\tau$	0.001232 0.4189 1.4860	unstable

表 5.3 $\frac{1}{2}$ 調波解と変分方程式 (5.31) の解の特性乗数

B	$a_0(\tau),$ $b_0(\tau)$	m_1, m_2, m_3	
1.10	$a_0 = 0.1077 \sin \tau - 0.5050 \cos \tau + 0.2182$ $b_0 = -0.0788 \sin \frac{1}{2}\tau - 1.5380 \cos \frac{1}{2}\tau$	0.00956 $- 0.3282 \pm 0.7892i$	stable
1.10	$a_0 = 0.1407 \sin \tau - 0.4887 \cos \tau + 0.0718$ $b_0 = -0.6863 \sin \frac{1}{2}\tau - 1.3054 \cos \frac{1}{2}\tau$	2.9447 $- 0.0148 \pm 0.0605i$	unstable

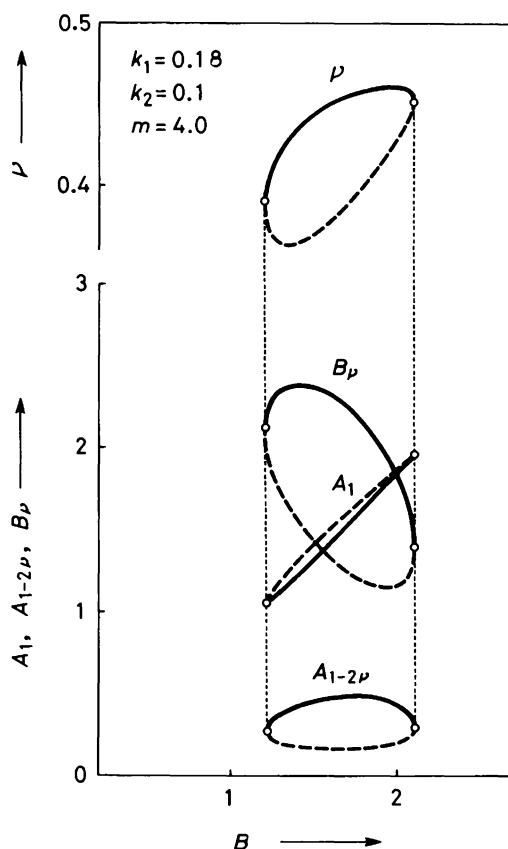


図 5.4 周波数 ν が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動の振幅特性および周波数特性。

$$k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.1, \quad m = 4.0 \quad (5.66)$$

である。第 5.5(c) 節の考察に従って変分方程式 (5.51) で表わされる系の特性根を求めて安定性を吟味した。その結果実線の部分で安定であり破線の部分で不安定である。

固有周波数 ν が 0.418 …… の概周期解 (5.13) の各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, B_\nu$, 位相角 $\alpha_1, \varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, および外力の振幅 B を求め、その結果を表 5.4 に示す。また固有周波数 ν が 0.418 …… の場合変分方程式 (5.51) で表わされる系の特性根を求め、式 (5.26) の特異点の種類を分類した。それらの結果を表 5.5 に示す。

パラメタ B および k_1 を変えて概周期解の周波数特性を求め、その結果を図 5.5 に示す。第 5.5(c) 節の考察に従って変分方程式 (5.51) で表わされる系の特性根を求めて安定性を吟味した。その結果実線の部分で安定であり破線の部分で不安定である。図 5.5 においてパラメタ B を変化するとそれにつれて固有周波数 ν も連続的に変化する。

表 5.4 固有周波数 ν が $0.418 \dots$ の概周期解 (5.13)

概周期解	ν	B	A_1	$A_{1-2\nu}$	B_ν	α_1	φ
(1)	0.418 ...	1.2872	1.0969	0.3598	2.3298	-1.3923	-2.0200
(2)	0.418 ...	1.9448	1.8062	0.1764	1.1423	-1.4726	-2.2871

表 5.5 変分方程式 (5.51) で表わされる系の特性根と式 (5.26) の特異点の分類

概周期解	式 (5.51) で表わされる系の特性根	式 (5.26) の特異点の分類
(1)	-0.0271, -0.3416, -5.3345	Stable node
(2)	0.0178, -0.3701, -10.3627	Saddle (unstable)

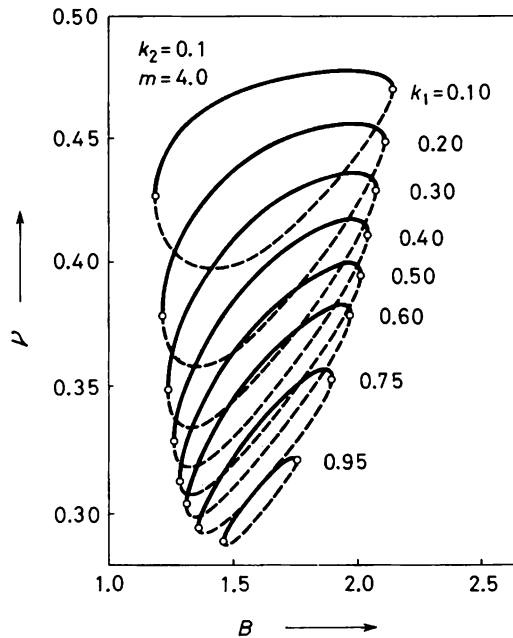


図 5.5 周波数 ν が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動の周波数特性。

5.6 概周期振動の位相空間解析 ($\nu < 1$ の場合)

(a) 調波解析法による数値解析

第 5.4 (b) 節において調波解析法を適用して概周期解 (5.13) の各振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, B_ν , 位相角 α_1 , $\varphi (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, 周波数 ν を求めた。この節では概周期解 (5.13) を位相空間において解析する。定常解 (5.13) の $a(\tau)$, $b(\tau)$, および $db(\tau)/d\tau$ の時間 $\tau = 2n\pi$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) に

おける値

$$\left. \begin{aligned} a(2n\pi) &= A_1 \sin(2n\pi + \alpha_1) + A_{1-2\nu} \sin[2n\pi(1-2\nu) + \alpha_{1-2\nu}] \\ b(2n\pi) &= B_\nu \sin(2n\pi\nu + \beta_\nu) \\ \dot{b}(2n\pi) &= \nu B_\nu \cos(2n\pi\nu + \beta_\nu), \quad (\cdot = d/d\tau) \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

を $a \ b \ \dot{b}$ 空間に写像する。^{*} これらの点 $(a(2n\pi), b(2n\pi), \dot{b}(2n\pi))$ は図 5.6 に示す閉曲線上にある。系のパラメタは

$$k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.10, \quad m = 4.0, \quad B = 1.6 \quad (5.68)$$

である。また固有周波数 ν は $0.447 \dots\dots$ となる。図において数字 1, 2, 3, および 4 を添えた点 (b, \dot{b}) はそれぞれ時間 $\tau = 2n\pi$, $(n = 1 \sim 4)$ における点 $(b(\tau), \dot{b}(\tau))$ を示す。

(b) 変換法を用いた位相空間解析

式 (5.8) で表わされる系に概周期振動が発生する場合には、 $a \ b \ d b/d\tau$ 空間における時間 $\tau = 2n\pi$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ の時点での点 $(a(\tau), b(\tau), d b(\tau)/d\tau)$ の写像は定常状態において 1 つの閉曲線上にある。この閉曲線は不変閉曲線とよばれる。

式 (5.68) のパラメタを用いて式 (5.8) を計算機^{**}で解き、 a, b , および $d b/d\tau$ を計算する。定常状態において時間 $\tau = 2n\pi$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ の時点での点 $(a(\tau), b(\tau), d b(\tau)/d\tau)$ は図 5.7 に示す閉曲線上にある。図 5.7 において数字 1, 2, 3, および 4 を添えた点はそれぞれ時間 $\tau = 2n\pi$, $(n = 1 \sim 4)$ における点 $(b(\tau), \dot{b}(\tau))$ を示す。この概周期振動の

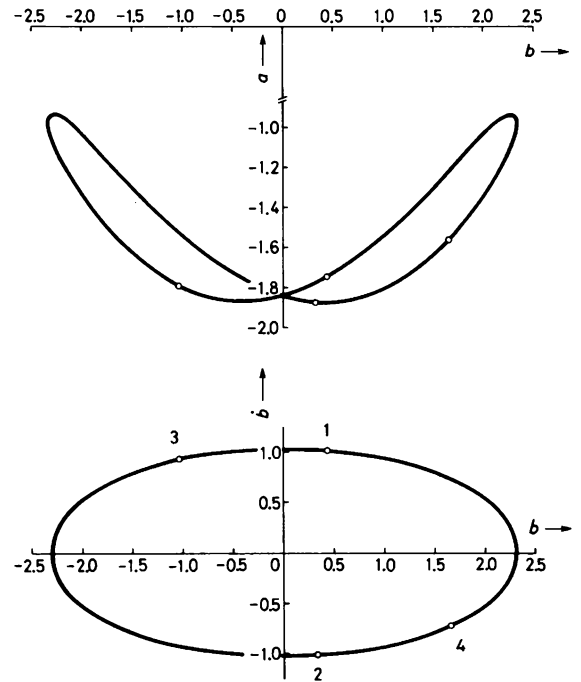


図 5.6 概周期解 (5.13) の時間 $\tau = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) における $a \ b \ d b/d\tau$ 空間への写像 (調波解析法による)。

^{*} 式 (5.8) は a について 1 階、 b について 2 階の微分方程式であるため、解 (5.13) を $a \ b \ \dot{b}$ 空間において解析する。

^{**} KDC II (京都大学計算機 No. 2) を使用した。

平均周波数は 0.420 …… である。調波解析法を用いて得られた図 5.6 を変換法を用いて得られた図 5.7 と比較すると概ね良好な一致を得た。

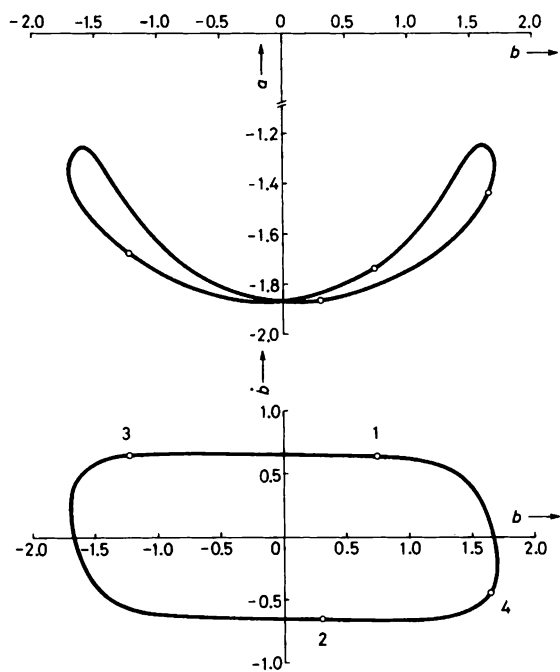


図 5.7 基礎方程式 (5.8)を解いて得られる不変閉曲線.

5.7 基本調波振動 ($\nu = 1$ の場合)^[6, 7]

周波数 ν が外力周波数に等しい基本調波解を調波解析法を用いて求め、その安定性を吟味する。周波数 ν を 1 とすれば、式 (5.15) において周波数 $1 - 2\nu$ は 1 に等しくなり、式 (5.15) は

$$\left. \begin{aligned} a &= x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \\ b &= x_\nu \sin \tau + y_\nu \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

となる。

(a) 周 期 解

周期解 (5.69)の振幅 x_1, y_1, x_ν, y_ν を決定するために、式 (5.69)を式 (5.8) の第 1 式および第 2 式に代入し、それぞれ周波数 1 の周波数成分を含む三角関数の係数を零に等し

いと置くと次式を得る。*

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -Px_1 + y_1 - \frac{3}{32} k_1 [x_1 (x_\nu^2 - y_\nu^2) + 2y_1 x_\nu y_\nu] + B \equiv X_1 \\ \frac{dy_1}{d\tau} &= -x_1 - Py_1 - \frac{3}{32} k_1 [-2x_1 x_\nu y_\nu + y_1 (x_\nu^2 - y_\nu^2)] \equiv Y_1 \\ \frac{dx_\nu}{d\tau} &= \frac{1}{2} Qx_\nu - \frac{k_2}{2m} y_\nu + \frac{1}{32m} \left[-\frac{1}{2} x_\nu y_1^2 + y_\nu x_1 y_1 \right] \equiv X_\nu \\ \frac{dy_\nu}{d\tau} &= -\frac{k_2}{2m} x_\nu - \frac{1}{2} Qy_\nu - \frac{1}{32m} \left[x_\nu x_1 y_1 + \frac{1}{2} y_\nu y_1^2 \right] \equiv Y_\nu \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

ここに

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{8} k_1 \left(\frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} B_\nu^2 \right), & Q &= \frac{1}{8m} \left(\frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 - 8m \right) \\ A_1^2 &= x_1^2 + y_1^2, & B_\nu^2 &= x_\nu^2 + y_\nu^2 \end{aligned}$$

ただし式(5.70)を導くにあたり次の仮定を設けた。

(i) 振幅 x_ν および y_ν は時間の経過と共に緩やかに変化するものであり、また k_2 は十分小さい量とする。従って $d^2 x_\nu/d\tau^2$, $d^2 y_\nu/d\tau^2$, $k_2 dx_\nu/d\tau$, および $k_2 dy_\nu/d\tau$ を無視した。

(ii) さらに k_1 は小さい量とする。従って振幅 x_1 は第1次近似解(5.10)の振幅 $A_1 (= y_1)$ と比較して小さい。また振幅 x_1 および y_1 は時間の経過と共に緩やかに変化するものとする。よって $dx_1/d\tau$ を無視した。

定常状態では式(5.70)において

$$dy_1/d\tau = 0, \quad dx_\nu/d\tau = 0, \quad dy_\nu/d\tau = 0 \quad (5.71)$$

となる。このとき式(5.70)より振幅 x_1 , y_1 , x_ν , および y_ν が求まる。周波数 ν が一定の値に対し、式(5.8)の解が系のパラメタ B , k_1 , k_2 , および m のある範囲で求まるので、その範囲内で外力に同期する領域のあることが判る。

式(5.70)より振幅 x_1 , y_1 , x_ν , および y_ν を消去して次式を得る。

* 定常解に対しては式(5.69)の振幅 x_1 , y_1 , x_ν , および y_ν は一定値をとるが、後に定常解の安定性を吟味するために、それらの時間微分も考慮した。

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[\left(1 + k_1 k_2 \frac{B_\nu^2}{A_1^2} \right)^2 + \left(P + k_1 m Q \frac{B_\nu^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B^2 \\
 & \left[Q^2 + \left(\frac{k_2}{m} \right)^2 - \left(\frac{3}{32m} A_1 \right)^2 \right] B_\nu^2 = 0 \\
 & \text{ここに} \\
 & P = \frac{1}{8} k_1 \left(\frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} B_\nu^2 \right), \quad Q = \frac{1}{8m} \left(\frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} A_1^2 - 8m \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

式 (5.72) において $B_\nu = 0$ なる解も存在し、式 (5.72) の第 1 式は

$$\left[1 + \left(\frac{3}{32} k_1 A_1^2 \right)^2 \right] A_1^2 = B^2 \quad (5.73)$$

となる。

(b) 周期係数を持つ変分方程式による安定判別

周期解 (5.69) の安定性を吟味するために、この周期解を $a_0(\tau)$ および $b_0(\tau)$ で表わし、次式で定義される周期解 $a_0(\tau)$ および $b_0(\tau)$ からの微小変分 $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ を考える。

$$\left. \begin{aligned}
 a(\tau) &= a_0(\tau) + \xi(\tau) \\
 b(\tau) &= b_0(\tau) + \eta(\tau)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

式 (5.74) を式 (5.8) に代入し、 $\xi(\tau)$ および $\eta(\tau)$ の 2 次以上の項を無視すると次の変分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{3}{8} k_1 \left[(a_0^2 + b_0^2) \xi + 2 a_0 b_0 \eta \right] = 0 \\
 & \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{k_2}{m} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{3}{8m} \left[2 a_0 b_0 \xi + (a_0^2 + b_0^2) \eta \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 a_0(\tau) &= x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau \\
 b_0(\tau) &= x_\nu \sin \tau + y_\nu \cos \tau
 \end{aligned}$$

式 (5.75) は周期 $L (= \pi)$ の周期関数を係数に持つ線形常微分方程式である。 $d\eta/d\tau = \zeta$ とおくと、式 (5.75) は次の 3 元連立 1 階の線形常微分方程式に書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= -\frac{3}{8} k_1 [(a_0^2 + b_0^2) \xi + 2a_0 b_0 \eta] \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \zeta \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\frac{3}{8m} [2a_0 b_0 \xi + (a_0^2 + b_0^2) \eta] - \frac{k_2}{m} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

$\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, および $\zeta(\tau)$ が時間の経過と共に零に収束すれば周期解 (5.69) は安定となる。第 5.5(a) 節の考察に従って式 (5.76) で表わされる系の特性乗数 m_i , ($i = 1, 2, 3$) を求め、式 (5.76) の解の安定性を調べる事ができる。既に述べたように特性乗数の絶対値がすべて 1 より小ならば周期解 (5.69) は安定である。数値例を第 5.7(c) 節に示す。

(c) 定数係数を持つ変分方程式による安定判別

周期解 (5.69) の安定性を吟味するために次式で定義される周期解の振幅 x_1 , y_1 , x_ν , および y_ν からの微小変分 $\xi_1(\tau)$, $\eta_1(\tau)$, $\xi_\nu(\tau)$, および $\eta_\nu(\tau)$ を考える。

$$\left. \begin{aligned} x_1(\tau) &= x_1 + \xi_1(\tau), & y_1(\tau) &= y_1 + \eta_1(\tau) \\ x_\nu(\tau) &= x_\nu + \xi_\nu(\tau), & y_\nu(\tau) &= y_\nu + \eta_\nu(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

変分 ξ_1 , η_1 , ξ_ν , および η_ν が時間の経過と共に零に収束すれば、周期解 (5.69) は安定である。式 (5.77) を式 (5.70) に代入し、 ξ_1 , η_1 , ξ_ν , および η_ν の 2 次以上の項を無視すると次の変分方程式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ \xi_\nu \\ \eta_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_\nu \\ \eta_\nu \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

ここに a_{ij} , ($i, j = 1 \sim 4$) は式 (5.70) の記号を用いて得られる

$$\frac{\partial (X_1, Y_1, X_\nu, Y_\nu)}{\partial (x_1, y_1, x_\nu, y_\nu)}$$

の対応する要素である。式 (5.78) で表わされる系の特性方程式は

$$A(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.79)$$

あるいは

$$b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0 \quad (5.80)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= -a_{11} \\ b_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \\ b_3 &= -(A_{22} + A_{33} + A_{44}) \\ b_4 &= |A| \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

である。ただし A は a_{ij} , ($i, j=1 \sim 4$) を要素とする行列であり, A_{ij} は行列式 $|A|$ における a_{ij} の余因子である。

変分方程式 (5.78) で表わされる系の特性根 λ_i , ($i=1, 2, 3$) の実数部がすべて負ならば, 変分 ξ_1, η_1, ξ_ν , および η_ν は時間の経過と共に零に収束し, 周期解 (5.69) は安定である。なお周期解 (5.69) の振幅特性曲線 (BA_1 および BB_ν の関係) が垂直接線を持つ点は

$$b_4 = A(0) = 0 \quad (5.82)$$

なる点で与えられる。^[2]

数 値 例

基本調波解 (5.69) の振幅特性を式 (5.72) より求め, その結果を図 5.8 に示す。系のパラメタは

$$k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.05, \quad m = 1.0 \quad (5.83)$$

である。第 5.7(b) 節の考察に従って周期係数を持つ変分方程式 (5.76) で表わされる系の特性乗数を調べることにより周期解の安定性を吟味した。その結果実線の部分で安定であり, 破線の部分で不安定となる。図中に記号を付した振幅を持つ周期解と変分方程式 (5.76) で表わさ

れる系の特性乗数 m_i , ($i = 1, 2, 3$) を表 5.6 に示した。

第 5.7(c) 節の考察に従って定数係数を持つ変分方程式 (5.78) で表わされる系の特性根 λ_i , ($i = 1, 2, 3$) を調べることにより周期解の安定性を吟味した。その結果を図 5.9 に示す。図において実線の部分で安定であり、破線の部分で不安定である。図 5.8 と図 5.9 を比較すると、周期解の安定性に関して概ね良好な一致を得た。図 5.9 において記号を付した特異点と変分方程式 (5.78) で表わされる系の特性根 λ_i , ($i = 1, 2, 3$) を表 5.7 に示し、式 (5.70) の特異点を分類した。

図 5.9 において $B = 1.30 \sim 3.17$ の範囲では基本調波振動が不安定となり、概周期振動が発生する。^{*} B の適当な範囲では、外力に同期化しているが振幅および位相角が変調した概周期振動が発生する場合もあるが、外力に同期化しない振動で固有周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の概周期振動が発生する場合もある。

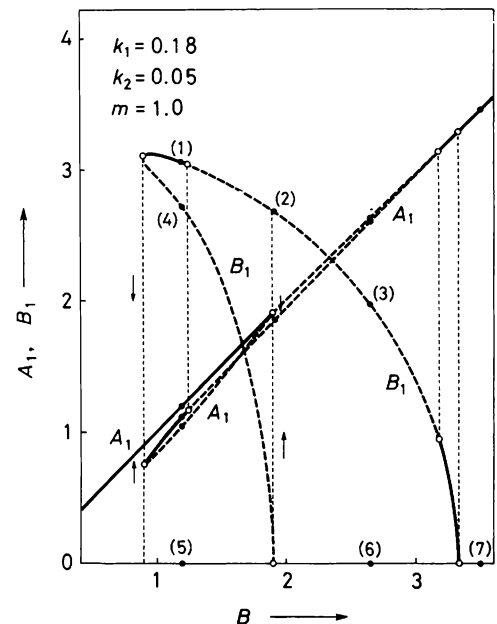


図 5.8 基本調波振動の振幅特性 (周期係数を持つ変分方程式 (5.76) による安定判別)。

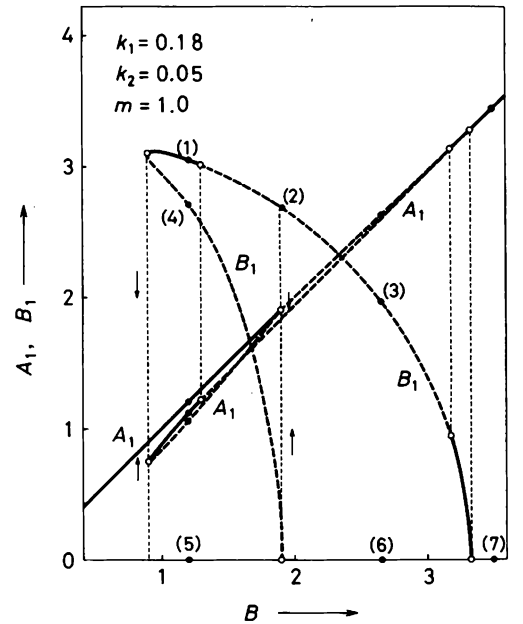


図 5.9 基本調波振動の振幅特性 (定数係数を持つ変分方程式 (5.78) による安定判別)。

^{*} この種の概周期振動を第 5.10 節で解析する。

表 5.6 基本調波解と特性乗数 m_i

周期解	B	$a_0(\tau), b_0(\tau)$	$m_1 \quad m_2 \quad m_3$
1	1.20	$a_0 = 0.1971 \sin \tau - 1.0871 \cos \tau$ $b_0 = 3.0501 \sin \tau - 0.1428 \cos \tau$	0.283, $-0.644 \pm 0.557 i$
2	1.90	$a_0 = 0.3205 \sin \tau - 1.8070 \cos \tau$ $b_0 = 2.6813 \sin \tau + 0.2583 \cos \tau$	0.241, $-0.498 \pm 0.950 i$
3	2.65	$a_0 = 0.4570 \sin \tau - 2.5545 \cos \tau$ $b_0 = 1.9591 \sin \tau + 0.2709 \cos \tau$	0.236, $-0.473 \pm 0.973 i$
4	1.20	$a_0 = 0.3596 \sin \tau - 1.0055 \cos \tau$ $b_0 = 1.5039 \sin \tau - 2.2612 \cos \tau$	0.169, $-0.387, -4.575$
5	1.20	$a_0 = 0.0291 \sin \tau - 1.1993 \cos \tau$ $b_0 = 0$	0.858, $-0.090 \pm 0.920 i$
6	2.65	$a_0 = 0.3056 \sin \tau - 2.6143 \cos \tau$ $b_0 = 0$	0.480, $-0.247, -2.001$
7	3.50	$a_0 = 0.6695 \sin \tau - 3.3669 \cos \tau$ $b_0 = 0$	0.287, $-0.502 \pm 0.776 i$

表 5.7 図 5.9 における特異点とその分類

特異点	B	y_1	x_ν	y_ν	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	分類
1	1.20	-1.0871	3.0501	-0.1428	-2.5500 $-0.0108 \pm 0.2836 i$	Stable focus
2	1.90	-1.8070	2.6813	0.2583	-2.8635 $0.0081 \pm 0.4574 i$	Saddle focus
3	2.65	-2.5545	1.9591	0.2709	-3.6643 $0.0172 \pm 0.4769 i$	Saddle focus
4	1.20	-1.0055	1.5039	-2.2612	-4.5751 -0.3852 0.1687	Saddle
5	1.20	-1.1993	0.0	0.0	-41.2010 $-0.0250 \pm 0.3588 i$	Stable focus
6	2.65	-2.6143	0.0	0.0	-8.6707 -0.3133 0.2633	Saddle
7	3.50	-3.3669	0.0	0.0	-5.2276 $-0.0250 \pm 0.2462 i$	Stable focus

5.8 主要成分の周波数 ν が1より大きい場合の定常解の考察^[7]

周波数 ν が1より大きい場合に対し外力に同期化した周期振動および同期化しない概周期振動について考察する。

定常解(5.14)の周波数 ν 、振幅 $A_1, B_\nu, B_{2-\nu}$ 、位相角 α_1, β_ν および $\beta_{2-\nu}$ を調波解析法を用いて決定するために、式(5.14)を式(5.8)の第1式に代入し周波数1に等しい周波数成分を含む三角関数の係数を零に等しいと置く。また式(5.14)を式(5.8)の第2式に代入し周波数 ν および周波数 $2-\nu$ に等しい周波数成分を含む三角関数の係数をそれぞれ零に等しいと置く。式(5.14)を式(5.8)に代入して得られる式には表5.8に示す周波数が含まれる。表5.8に示すように周波数 ν が $\frac{3}{2}$ 、2、あるいは3の場合、周波数 $5-2\nu$ 、 $3\nu-4$ 、あるいは $6-3\nu$ 等のように見掛上周波数1、 ν 、あるいは $2-\nu$ と異なる周波数が周波数1、 ν 、あるいは $2-\nu$ に等しくなる。また、周波数 ν が $\frac{3}{2}$ 、2、および3以外の場合には、周波数1、 ν 、あるいは $2-\nu$ に等しくなる周波数はそれぞれ周波数1、 ν 、あるいは $2-\nu$ 以外にない。これらの関係を考慮して調波解析を行なう。

表 5.8 式(5.14)を式(5.8)に代入して得られる周波数

主要成分周波数 ν	$\nu = \frac{3}{2}$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu \neq \frac{3}{2}, \nu \neq 2, \nu \neq 3$
1 に等しくなる周波数	1	1, $2\nu-3$, $5-2\nu$	1, $2\nu-5$	1
ν に等しくなる周波数	ν , $6-3\nu$	ν , $4-\nu$, $3\nu-4$	ν , $3\nu-6$	ν
$2-\nu$ に等しくなる周波数	$2-\nu$, $3\nu-4$	$2-\nu$, $6-3\nu$	$2-\nu$, $4-\nu$	$2-\nu$

(1) ν が $\frac{3}{2}$ のとき

式(5.14)を式(5.8)に代入して調波解析を行なうと次式を得る。*

$$\frac{dA_1}{d\tau} = X_1 \equiv X_{\frac{3}{2}, 1}$$

$$0 = Y_1 \equiv Y_{\frac{3}{2}, 1}$$

* 定常状態における解に対しては、式(5.14)の各振幅および位相角は一定値をとるが、後に定常解の安定性を吟味するので、そのため、これらの時間微分も考慮した。なお式(5.84)～式(5.88)を導くに当っては後に述べる近似を行なった。

$$\begin{aligned}
 \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu + \frac{1}{64m\nu} B_{2-\nu}^3 \sin \varphi_1 \equiv X_{\frac{3}{2},\nu} \\
 B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu + \frac{1}{64m\nu} B_{2-\nu}^3 \cos \varphi_1 \equiv Y_{\frac{3}{2},\nu} \\
 0 &= X_{2-\nu} - \frac{3}{64m(2-\nu)} B_\nu B_{2-\nu}^2 \sin \varphi_1 \equiv X_{\frac{3}{2},2-\nu} \\
 0 &= Y_{2-\nu} - \frac{3}{64m(2-\nu)} B_\nu B_{2-\nu}^2 \cos \varphi_1 \equiv Y_{\frac{3}{2},2-\nu}
 \end{aligned}
 \tag{5.84}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -\beta_\nu + 3\beta_{2-\nu} \\
 X_1 &= -\frac{1}{8} k_1 (P_1 A_1 + \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \cos \varphi) + B \cos \alpha_1 \\
 Y_1 &= -A_1 - \frac{3}{16} k_1 A_1 B_\nu B_{2-\nu} \sin \varphi - B \sin \alpha_1 \\
 X_\nu &= -\frac{k_2}{2m} B_\nu + \frac{3}{64m\nu} A_1^2 B_{2-\nu} \sin \varphi \\
 Y_\nu &= \frac{1}{16m\nu} (Q_\nu B_\nu + \frac{3}{4} A_1^2 B_{2-\nu} \cos \varphi) \\
 X_{2-\nu} &= -\frac{k_2}{2m} B_{2-\nu} + \frac{3}{64m(2-\nu)} A_1^2 B_\nu \sin \varphi \\
 Y_{2-\nu} &= \frac{1}{16m(2-\nu)} (Q_{2-\nu} B_{2-\nu} + \frac{3}{4} A_1^2 B_\nu \cos \varphi) \\
 P_1 &= \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (B_\nu^2 + B_{2-\nu}^2), \quad Q_\nu = \frac{3}{4} B_\nu^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_{2-\nu}^2) - 8m\nu^2 \\
 Q_{2-\nu} &= \frac{3}{4} B_{2-\nu}^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_\nu^2) - 8m(2-\nu)^2, \quad \varphi = -2\alpha_1 + \beta_\nu + \beta_{2-\nu}
 \end{aligned}
 \tag{5.85}$$

(2) ν が 2 のとき

式 (5.14) を式 (5.8) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1 + \frac{3}{16} k_1 A_1 B_{2-\nu} (B_\nu \cos \varphi_2 + B_{2-\nu} \cos \varphi_3) \equiv X_{2,1} \\
 0 &= Y_1 - \frac{3}{16} k_1 A_1 B_{2-\nu} (B_\nu \sin \varphi_2 - B_{2-\nu} \sin \varphi_3) \equiv Y_{2,1} \\
 \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu + \frac{3}{64m\nu} B_{2-\nu} (A_1^2 \sin \varphi_2 - 2B_\nu B_{2-\nu} \sin \varphi_3) \equiv X_{2,\nu}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu + \frac{3}{64m\nu} B_{2-\nu} (A_1^2 \cos \varphi_2 + 2 B_\nu B_{2-\nu} \cos \varphi_3) \equiv Y_{2,\nu} \\
 0 &= \frac{1}{16m} (Q_{2-\nu} B_{2-\nu} + \frac{3}{4} A_1^2 B_\nu \cos \varphi_2 - \frac{1}{4} B_{2-\nu}^3 \cos \varphi_3) \equiv Y_{2,2-\nu} \\
 \varphi_2 &= -2\alpha_1 + \beta_\nu - \beta_{2-\nu}, \quad \varphi_3 = 2\beta_{2-\nu} = \pi
 \end{aligned} \right\} (5.86)$$

ここに

ただし式 (5.85) の記号を用いた。

(3) ν が 3 のとき

式 (5.14) を式 (5.8) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1 - \frac{3}{32} k_1 A_1 B_{2-\nu}^2 \cos \varphi_4 \equiv X_{3,1} \\
 0 &= Y_1 - \frac{3}{32} k_1 A_1 B_{2-\nu}^2 \sin \varphi_4 \equiv Y_{3,1} \\
 \frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu + \frac{1}{64m\nu} B_{2-\nu}^3 \sin \varphi_5 \equiv X_{3,\nu} \\
 B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= Y_\nu - \frac{1}{64m\nu} B_{2-\nu}^3 \cos \varphi_5 \equiv Y_{3,\nu} \\
 0 &= X_{2-\nu} + \frac{3}{64m(2-\nu)} B_{2-\nu} (A_1^2 \sin \varphi_4 - B_\nu B_{2-\nu} \sin \varphi_5) \equiv X_{3,2-\nu} \\
 0 &= Y_{2-\nu} + \frac{3}{64m(2-\nu)} B_{2-\nu} (A_1^2 \cos \varphi_4 - B_\nu B_{2-\nu} \cos \varphi_5) \equiv Y_{3,2-\nu} \\
 \varphi_4 &= -2(\alpha_1 + \beta_{2-\nu}), \quad \varphi_5 = -\beta_\nu - 3\beta_{2-\nu}
 \end{aligned} \right\} (5.87)$$

ここに

ただし式 (5.85) の記号を用いた。

(4) ν が $\frac{3}{2}$, 2, および 3 以外のとき

式 (5.14) を式 (5.8) に代入して調波解析を行なうと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dA_1}{d\tau} &= X_1, \quad 0 = Y_1, \quad \frac{dB_\nu}{d\tau} = X_\nu, \quad B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} = Y_\nu \\
 0 &= X_{2-\nu}, \quad 0 = Y_{2-\nu}
 \end{aligned} \right\} (5.88)$$

ただし式 (5.85) の記号を用いた。

なお式 (5.84)～式 (5.88) を導くにあたり次の仮定を設けた。

(i) 式 (5.14) において振幅 B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 β_ν , および $\beta_{2-\nu}$ は時間の経過と共に緩やかに変化するものとし, また k_2 は小さい量とする。従って $d^2 B_\nu / d\tau^2$, $d^2 B_{2-\nu} / d\tau^2$, $B_\nu d^2 \beta_\nu / d\tau^2$, $B_{2-\nu} d^2 \beta_{2-\nu} / d\tau^2$, $(dB_\nu / d\tau)(d\beta_\nu / d\tau)$, $(dB_{2-\nu} / d\tau)(d\beta_{2-\nu} / d\tau)$, $B_\nu (d\beta_\nu / d\tau)^2$, $B_{2-\nu} (d\beta_{2-\nu} / d\tau)^2$, $k_2 dB_\nu / d\tau$, $k_2 dB_{2-\nu} / d\tau$, $k_2 B_\nu d\beta_\nu / d\tau$, および $k_2 B_{2-\nu} d\beta_{2-\nu} / d\tau$ を無視した。

(ii) さらに, 第2次近似解 (5.16) の振幅 x_1 , $x_{2-\nu}$, および $y_{2-\nu}$ は第1次近似解 (5.10) の振幅 y_1 , x_ν , および y_ν と比較して小さい。また各振幅は時間の経過と共に緩やかに変化するものとする。従って $dx_1 / d\tau$, $dx_{2-\nu} / d\tau$, $dy_{2-\nu} / d\tau$ を無視した。また式 (5.17) の関係を用いて $A_1 d\alpha_1 / d\tau$, $dB_{2-\nu} / d\tau$, および $B_{2-\nu} d\beta_{2-\nu} / d\tau$ を無視した。なお式 (5.88) を導くにあたり周波数 ν は時間の経過と共に緩やかに変化するものとし, その時間微分を無視した。

定常状態では式 (5.84), 式 (5.86), 式 (5.87), および式 (5.88) において

$$\frac{dA_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dB_\nu}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\beta_\nu}{d\tau} = 0 \quad (5.89)$$

となる。

(a) 周期解

周波数 ν が $\frac{3}{2}$, 2, あるいは3の場合, 式 (5.8) の周期解は式 (5.14) で示される。系のパラメタ B , k_1 , k_2 , および m を適当に与えると, 式 (5.84), 式 (5.86), あるいは式 (5.87) より周期解 (5.14) の振幅 A_1 , B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 α_1 , β_ν , および $\beta_{2-\nu}$ がすべて求まる。周波数 ν が一定の値 ($\frac{3}{2}$, 2, あるいは3) に対し, 周期解 (5.14) がパラメタ B , k_1 , k_2 , および m のある範囲で求まるので, その範囲内で解が外力に同期化する領域のあることが判る。

なお式 (5.86) より位相角 α_1 , β_ν , および $\beta_{2-\nu}$ を消去すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(1 + 4k_1 k_2 \frac{B_2^2}{A_1^2} \right)^2 + \frac{1}{64} k_1^2 \left(P_1 - 2Q_2 \frac{B_2^2}{A_1^2} \right)^2 \right] A_1^2 = B^2 \\ & (16k_2 B_2)^2 + Q_2^2 B_2^2 = \left(\frac{3}{2} A_1^2 B_0 \right)^2 \\ & Q_2 B_2^2 = 2Q_0 B_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} B_2^2 + 3B_0^2, \quad Q_2 = \frac{3}{4} B_2^2 + \frac{3}{2} A_1^2 + 3B_0^2 - 32m$$

$$Q_0 = B_0^2 + \frac{3}{2} (A_1^2 + B_2^2)$$

式 (5.90) より第 2 高調波解の振幅 A_1 , B_2 , および B_0 を求めることができる。

(b) 概周期解

周波数 ν が $\frac{3}{2}$, 2, および 3 などの簡単な整数比以外のとき, 概周期解は式 (5.14) で示される。この場合式 (5.14) を式 (5.8) に代入し調波解析を行って式 (5.88) を得た。式 (5.88) の第 3 式および第 5 式より次式を得る。

$$k_2 [\nu B_\nu^2 + (\nu - 2) B_{2-\nu}^2] = 0 \quad (5.91)$$

まず k_2 が零の場合には, パラメタ B , k_1 , m , および振幅 B_ν を適当に与えると, 式 (5.88) より振幅 A_1 , $B_{2-\nu}$, 位相角 α_1 , $\varphi (= -2\alpha_1 + \beta_\nu + \beta_{2-\nu})$, および周波数 ν が定まる。しかし位相角 β_ν あるいは $\beta_{2-\nu}$ は定まらない。またパラメタ B を変えると, 周波数 ν もそれにつれて連続的に変化するので, 解 (5.14) が外力に同期化する領域のないことが判る。

つぎに, k_2 が零でないとき, $\nu > 1$, $B_\nu^2 \geq B_{2-\nu}^2 \geq 0$ なる場合を考えているから, 式 (5.91) より振幅 B_ν および $B_{2-\nu}$ は零となる。すなわち, 式 (5.14) の程度の近似では, 周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動* は解析できないので, より高次の近似解を求めて解析する。

式 (5.8) においてパラメタ k_1 が十分小さくない場合, a に含まれる周波数成分について考える。第 2 次近似解 (5.14) を式 (5.11) の第 1 式の右辺に代入し両辺を積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} a = & -B \cos \tau + \frac{1}{8} k_1 \left[P_1 A_1 \cos (\tau + \alpha_1) + \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \cos (\tau + \beta_\nu + \beta_{2-\nu} - \alpha_1) \right. \\ & - \frac{3}{4(1-2\nu)} A_1 B_\nu \{ B_\nu \cos [(1-2\nu)\tau + \alpha_1 - 2\beta_\nu] + 2B_{2-\nu} \cos [(1-2\nu)\tau - \alpha_1 - \beta_\nu + \beta_{2-\nu}] \} \\ & - \frac{3}{4(3-2\nu)} A_1 B_{2-\nu} \{ B_{2-\nu} \cos [(3-2\nu)\tau - \alpha_1 + 2\beta_{2-\nu}] + 2B_\nu \cos [(3-2\nu)\tau + \alpha_1 - \beta_\nu + \beta_{2-\nu}] \} \\ & - \frac{3}{4(5-2\nu)} A_1 B_{2-\nu}^2 \cos [(5-2\nu)\tau + \alpha_1 + 2\beta_{2-\nu}] \\ & - \frac{3}{4(1+2\nu)} A_1 B_\nu^2 \cos [(1+2\nu)\tau + \alpha_1 + 2\beta_\nu] \\ & \left. - \frac{1}{12} A_1 \{ A_1^2 \cos (3\tau + 3\alpha_1) + B_\nu B_{2-\nu} \cos (3\tau + \alpha_1 + \beta_\nu + \beta_{2-\nu}) \} \right] \quad (5.92) \end{aligned}$$

* 式 (5.8) においてパラメタ k_1 が十分小さい場合には, 概周期振動は発生しないことが実験によって確かめられている。

$$+ A_0$$

ここに

$$P_1 = \frac{3}{4} A_1^2 + \frac{3}{2} (B_\nu^2 + B_{2-\nu}^2)$$

ただし A_0 は積分定数である。式 (5.92) には周波数 1 の成分以外の周波数成分が現われる。周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間のとき、解の各周波数成分の内振幅の比較的大きなもののみを考慮して、 a および b の高次の近似式を次のように仮定する*。

$1 < \nu < \frac{3}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} a &= A_1 \sin(\tau + \alpha_1) + A_{1-2\nu} \sin[(1-2\nu)\tau + \alpha_{1-2\nu}] + A_{3-2\nu} \sin[(3-2\nu)\tau + \alpha_{3-2\nu}] \\ b &= B_\nu \sin(\nu\tau + \beta_\nu) + B_{2-\nu} \sin[(2-\nu)\tau + \beta_{2-\nu}] \end{aligned} \right\} (5.93)$$

外力に同期化しない概周期解 (5.93) の周波数 ν 、各振幅 A_1 、 $A_{1-2\nu}$ 、 $A_{3-2\nu}$ 、 B_ν 、 $B_{2-\nu}$ 、位相角 α_1 、 $\alpha_{1-2\nu}$ 、 $\alpha_{3-2\nu}$ 、 β_ν 、および $\beta_{2-\nu}$ を決定するために、式 (5.93) を式 (5.8) の第 1 式に代入し、周波数 1、 $1-2\nu$ 、および $3-2\nu$ の周波数成分を含む三角関数の係数をそれぞれ零に等しいと置き、また式 (5.93) を式 (5.8) の第 2 式に代入し、周波数 ν および $2-\nu$ の周波数成分を含む三角関数の係数をそれぞれ零に等しいと置くと次式を得る**。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= B \cos \varphi_1 - \frac{1}{8} k_1 \left[P_1 A_1 + \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} \cos \theta_1 + \frac{3}{4} A_{3-2\nu} B_{2-\nu}^2 \cos \theta_2 - \frac{3}{4} A_{1-2\nu} B_\nu^2 \cos \theta_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_4 + \frac{3}{2} A_{3-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_5 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_6 \right] \equiv X_1 \\ 0 &= -B \sin \varphi_1 - A_1 - \frac{1}{8} k_1 \left[-\frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} \sin \theta_1 + \frac{3}{4} A_{3-2\nu} B_{2-\nu}^2 \sin \theta_2 - \frac{3}{4} A_{1-2\nu} B_\nu^2 \sin \theta_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_4 + \frac{3}{2} A_{3-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_5 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_6 \right] \equiv Y_1 \end{aligned} \right\}$$

* 実験結果においても、式 (5.93) の周波数成分が他の周波数成分に比較して優勢であることが観察された。

** 定常状態における解に対しては、式 (5.93) の各振幅および位相角は一定値をとるが、後に定常解の安定性を吟味するため、それらの時間微分も考慮した。

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{8} k_1 [P_{1-2\nu} A_{1-2\nu} - \frac{3}{4} A_1^2 A_{3-2\nu} \cos \theta_1 - \frac{3}{4} A_1 B_\nu^2 \cos \theta_3 \\
&\quad - \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_6 - \frac{3}{2} A_{3-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_7] \equiv X_{1-2\nu} \\
0 &= -(1-2\nu) A_{1-2\nu} - \frac{1}{8} k_1 [-\frac{3}{4} A_1^2 A_{3-2\nu} \sin \theta_1 + \frac{3}{4} A_1 B_\nu^2 \sin \theta_3 \\
&\quad - \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_6 - \frac{3}{2} A_{3-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_7] \equiv Y_{1-2\nu} \\
0 &= -\frac{1}{8} k_1 [P_{3-2\nu} A_{3-2\nu} - \frac{3}{4} A_1^2 A_{1-2\nu} \cos \theta_1 + \frac{3}{4} A_1 B_{2-\nu}^2 \cos \theta_2 \\
&\quad + \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_5 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \cos \theta_7] \equiv X_{3-2\nu} \\
0 &= -(3-2\nu) A_{3-2\nu} - \frac{1}{8} k_1 [\frac{3}{4} A_1^2 A_{1-2\nu} \sin \theta_1 + \frac{3}{4} A_1 B_{2-\nu}^2 \sin \theta_2 \\
&\quad - \frac{3}{2} A_1 B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_5 + \frac{3}{2} A_{1-2\nu} B_\nu B_{2-\nu} \sin \theta_7] \equiv Y_{3-2\nu} \\
\frac{dB_\nu}{d\tau} &= -\frac{k_2}{2m} B_\nu - \frac{1}{16m\nu} [\frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \sin \theta_3 - \frac{3}{4} A_1^2 B_{2-\nu} \sin \theta_4 \\
&\quad - \frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \sin \theta_5 - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_{2-\nu} \sin \theta_6 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \sin \theta_7] \equiv X_\nu \\
B_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\tau} &= \frac{1}{16m\nu} [Q_\nu B_\nu - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \cos \theta_3 + \frac{3}{4} A_1^2 B_{2-\nu} \cos \theta_4 \\
&\quad + \frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \cos \theta_5 - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_{2-\nu} \cos \theta_6 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \cos \theta_7] \equiv Y_\nu \\
0 &= -\frac{k_2}{2m} B_{2-\nu} - \frac{1}{16m(2-\nu)} [-\frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \sin \theta_2 - \frac{3}{4} A_1^2 B_\nu \sin \theta_4 \\
&\quad + \frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_\nu \sin \theta_5 + \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \sin \theta_6 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} B_\nu \sin \theta_7] \equiv X_{2-\nu} \\
0 &= \frac{1}{16m(2-\nu)} [Q_{2-\nu} B_{2-\nu} + \frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_{2-\nu} \cos \theta_2 + \frac{3}{4} A_1^2 B_\nu \cos \theta_4 \\
&\quad + \frac{3}{2} A_1 A_{3-2\nu} B_\nu \cos \theta_5 - \frac{3}{2} A_1 A_{1-2\nu} B_\nu \cos \theta_6 - \frac{3}{2} A_{1-2\nu} A_{3-2\nu} B_\nu \cos \theta_7] \equiv Y_{2-\nu}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

ここに

$$\begin{aligned}
P_1 &= R - \frac{3}{4} A_1^2, & P_{1-2\nu} &= R - \frac{3}{4} A_{1-2\nu}^2 \\
P_{3-2\nu} &= R - \frac{3}{4} A_{3-2\nu}^2, & Q_\nu &= R - \frac{3}{4} B_\nu^2 - 8\nu^2 m
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
Q_{2-\nu} &= R - \frac{3}{4} B_{2-\nu}^2 - 8(2-\nu)^2 m, & R &= \frac{3}{2} (A_1^2 + A_{1-2\nu}^2 + A_{3-2\nu}^2 + B_\nu^2 + B_{2-\nu}^2) \\
\theta_1 &= -2\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3, & \theta_2 &= -\varphi_1 - \varphi_3 \\
\theta_3 &= -\varphi_1 + \varphi_4, & \theta_4 &= -2\varphi_1 - \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_4) \\
\theta_5 &= -\varphi_1 + \varphi_3 - \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_4), & \theta_6 &= -\varphi_1 - \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_4) \\
\theta_7 &= \varphi_3 - \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_4) \\
\varphi_1 &= \alpha_1, & \varphi_2 &= \alpha_{1-2\nu} - 2\beta_{2-\nu} \\
\varphi_3 &= \alpha_{3-2\nu} - 2\beta_{2-\nu}, & \varphi_4 &= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu
\end{aligned} \right\} (5.95)$$

ただし式(5.94)を導くにあたり、式(5.21)あるいは式(5.88)を導いた場合と同様の仮定を設け、 $A_1 d\alpha_1/d\tau$, $dA_{1-2\nu}/d\tau$, $A_{1-2\nu} d\alpha_{1-2\nu}/d\tau$, $dA_{3-2\nu}/d\tau$, $A_{3-2\nu} d\alpha_{3-2\nu}/d\tau$, $dB_{2-\nu}/d\tau$, $B_{2-\nu} d\beta_{2-\nu}/d\tau$, および $d\nu/d\tau$ を無視した。

式(5.94)を書き直すと

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dA_1}{d\tau} &= X_1, & 0 &= X_{1-2\nu}, & 0 &= X_{3-2\nu} \\
\frac{dB_\nu}{d\tau} &= X_\nu, & 0 &= X_{2-\nu} \\
0 &= \frac{Y_1}{A_1}, & 0 &= \frac{Y_{1-2\nu}}{A_{1-2\nu}} - 2\frac{Y_{2-\nu}}{B_{2-\nu}}, & 0 &= \frac{Y_{3-2\nu}}{A_{3-2\nu}} - 2\frac{Y_{2-\nu}}{B_{2-\nu}} \\
\frac{d\varphi_4}{d\tau} &= \frac{Y_{1-2\nu}}{A_{1-2\nu}} + 2\frac{Y_\nu}{B_\nu}, & 0 &= \frac{Y_{2-\nu}}{B_{2-\nu}}
\end{aligned} \right\} (5.96)$$

を得る。ただし式(5.94)および式(5.95)の記号を用いた。定常状態では式(5.96)において $dA_1/d\tau = 0$, $dB_\nu/d\tau = 0$, $d\varphi_4/d\tau = 0$ となる。この場合式(5.96)は11個の未知数 A_1 , $A_{1-2\nu}$, $A_{3-2\nu}$, B_ν , $B_{2-\nu}$, α_1 , $\alpha_{1-2\nu}$, $\alpha_{3-2\nu}$, β_ν , $\beta_{2-\nu}$, および ν に関する10個の代数方程式であるから、式(5.96)より11個の未知数の全ては確定しない。しかし概周期解(5.93)の各振幅、位相角、および周波数を記述する式(5.96)は位相角については式(5.95)に示す φ_1 , φ_2 , φ_3 , および φ_4 によって表現され、式(5.96)では振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, $A_{3-2\nu}$, B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , および周波数 ν が未知数である。従って系のパラメタ B , k_1 , k_2 ,

および m を適当に与えると式 (5.96) より振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, A_{3-2\nu}, B_\nu, B_{2-\nu}$, 位相角 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, および周波数 ν は定まる。しかし位相角 $\alpha_{1-2\nu}, \alpha_{3-2\nu}, \beta_\nu$, および $\beta_{2-\nu}$ は定まらない。またパラメタ B, k_1, k_2 , あるいは m を変えると周波数 ν もそれにつれて連続的に変化するので、解 (5.93) は外力に同期化しない概周期解となる。数値例を第 5.9 (b) 節に示す。

5.9 定常解の安定性 ($\nu > 1$ の場合) ^[7]

(a) 周期解の安定性 ($\nu = \frac{3}{2}, 2$, あるいは 3 の場合)

周波数 ν が $\frac{3}{2}, 2$, あるいは 3 の場合の周期解は式 (5.14) で示される。周期解 (5.14) の安定性を吟味するために、次式で定義される各振幅および位相角の定常値 $A_1, B_\nu, B_{2-\nu}, \alpha_1, \beta_\nu$, および $\beta_{2-\nu}$ からの変分 $\xi_s(\tau)$ および $\eta_s(\tau)$, ($s = 1, \nu, 2-\nu$) を考える。^{*}

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau) &= A_1 + \xi_1(\tau), & \alpha_1(\tau) &= \alpha_1 + \eta_1(\tau) \\ B_\nu(\tau) &= B_\nu + \xi_\nu(\tau), & \beta_\nu(\tau) &= \beta_\nu + \eta_\nu(\tau) \\ B_{2-\nu}(\tau) &= B_{2-\nu} + \xi_{2-\nu}(\tau), & \beta_{2-\nu}(\tau) &= \beta_{2-\nu} + \eta_{2-\nu}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

式 (5.97) を式 (5.84), 式 (5.86), あるいは式 (5.87) に代入し $\xi_s(\tau)$ および $\eta_s(\tau)$, ($s = 1, \nu, 2-\nu$) の 2 次以上の項を無視すると次の変分方程式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_\nu \\ 0 \\ 0 \\ \eta_\nu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_\nu \\ \xi_{2-\nu} \\ \eta_1 \\ \eta_\nu \\ \eta_{2-\nu} \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

ここに a_{ij} , ($i, j = 1 \sim 6$) は式 (5.84) ~ 式 (5.87) より得られる

$$\frac{\partial (X_{s,1}, X_{s,\nu}, X_{s,2-\nu}, Y_{s,1}/A_1, Y_{s,\nu}/B_\nu, Y_{s,2-\nu}/B_{2-\nu})}{\partial (A_1, B_\nu, B_{2-\nu}, \alpha_1, \beta_\nu, \beta_{2-\nu})}, \quad (s = \frac{3}{2}, 2, 3)$$

^{*} $\nu = 2$ の場合には $\beta_{2-\nu} = \pi/2$ であり, $\beta_{2-\nu}$ の変分は考えない。

の対応する要素である。式 (5.98) で表わされる系の特性方程式は

$$A(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\lambda & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.99)$$

あるいは

$$b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0 \quad (5.100)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= - \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{43} & a_{44} & a_{46} \\ a_{63} & a_{64} & a_{66} \end{vmatrix} \\ b_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{46} \\ a_{61} & a_{63} & a_{64} & a_{66} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{26} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{36} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{46} \\ a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{66} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} \\ b_3 &= -(A_{11} + A_{22} + A_{55}) \\ b_4 &= |A| \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

である。但し A は a_{ij} , ($i, j = 1 \sim 6$) を要素とする行列であり, A_{ij} は行列式 $|A|$ における a_{ij} の余因子である。第 5.7(c) 節で既に述べたように, 変分方程式 (5.98) で表わされる系の特性根 λ_i , ($i = 1, 2, 3$) の実数部がすべて負ならば, 変分 $\xi_s(\tau)$ および $\eta_s(\tau)$, ($s = 1, \nu, 2 - \nu$) は時間の経過と共に零に収束し, 周期解 (5.14) は安定である。なお周期解 (5.14) の振幅特性曲線が垂直接線を持つ点は

$$b_4 = A(0) = 0 \quad (5.102)$$

なる点で与えられる。

(b) 概周期解の安定性

周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の概周期解は式 (5.93) で示される。既に第 5.8(b) 節で述べたように、概周期解 (5.93) の振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, A_{3-2\nu}, B_\nu, B_{2-\nu}$, 位相角 $\alpha_1, \alpha_{1-2\nu}, \alpha_{3-2\nu}, \beta_\nu, \beta_{2-\nu}$, および周波数 ν を記述する式 (5.96) は位相角について $\varphi_1 (= \alpha_1)$, $\varphi_2 (= \alpha_{1-2\nu} - 2\beta_{2-\nu})$, $\varphi_3 (= \alpha_{3-2\nu} - 2\beta_{2-\nu})$, および $\varphi_4 (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$ で表わされ、式 (5.96) において振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, A_{3-2\nu}, B_\nu, B_{2-\nu}$, 位相角 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, および周波数 ν が未知数である。以下の式の表現を簡単にするために、式 (5.96) の記号を次のように書き換える。

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ B_\nu \\ \varphi_4 \\ A_{1-2\nu} \\ A_{3-2\nu} \\ B_{2-\nu} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \nu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_\nu \\ Y_{1-2\nu}/A_{1-2\nu} + 2Y_\nu/B_\nu \\ X_{1-2\nu} \\ X_{3-2\nu} \\ X_{2-\nu} \\ Y_1/A_1 \\ Y_{1-2\nu}/A_{1-2\nu} - 2Y_{2-\nu}/B_{2-\nu} \\ Y_{3-2\nu}/A_{3-2\nu} - 2Y_{2-\nu}/B_{2-\nu} \\ Y_{2-\nu}/B_{2-\nu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{array} \right\} \quad (5.103)$$

式 (5.103) の記号を用いて式 (5.96) を書き換えると

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_i}{d\tau} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{10}), \quad (i = 1 \sim 3) \\ 0 = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{10}), \quad (i = 4 \sim 10) \end{array} \right\} \quad (5.104)$$

となる。概周期解 (5.93) の安定性を吟味するために、次式で定義される各振幅、位相角、および周波数の定常値 x_i , ($i = 1 \sim 10$) からの変分 $\xi_i(\tau)$, ($i = 1 \sim 10$) を考える。

$$x_i(\tau) = x_i + \xi_i(\tau), \quad (i = 1 \sim 10) \quad (5.105)$$

変分 $\xi_i(\tau)$, ($i=1\sim 10$) が時間の経過と共に零に収束すれば, 概周期解 (5.93) は各振幅, 位相角 ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$), および周波数 ν に関して安定である。式 (5.105) を式 (5.104) に代入し $\xi_i(\tau)$, ($i=1\sim 10$) の 2 次以上の項を無視すると次の変分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau} &= a_{11} \xi_1 + a_{12} \xi_2 + a_{13} \xi_3 + \cdots + a_{1\ 10} \xi_{10} \\ \frac{d\xi_2}{d\tau} &= a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{23} \xi_3 + \cdots + a_{2\ 10} \xi_{10} \\ \frac{d\xi_3}{d\tau} &= a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 + \cdots + a_{3\ 10} \xi_{10} \\ 0 &= a_{41} \xi_1 + a_{42} \xi_2 + a_{43} \xi_3 + \cdots + a_{4\ 10} \xi_{10} \\ 0 &= a_{51} \xi_1 + a_{52} \xi_2 + a_{53} \xi_3 + \cdots + a_{5\ 10} \xi_{10} \\ 0 &= a_{10\ 1} \xi_1 + a_{10\ 2} \xi_2 + a_{10\ 3} \xi_3 + \cdots + a_{10\ 10} \xi_{10} \end{aligned} \right\} \quad (5.106)$$

ここに a_{ij} , ($i, j=1\sim 10$) は x_j , ($j=1\sim 10$) の定常値における $\partial X_i / \partial x_j$ である。式 (5.106) で表わされる系の特性方程式は

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots & a_{1\ 10} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots & a_{2\ 10} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3\ 10} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4\ 10} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots & a_{5\ 10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10\ 1} & a_{10\ 2} & a_{10\ 3} & a_{10\ 4} & a_{10\ 5} & \cdots & a_{10\ 10} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.107)$$

となる。第 5.5(c) 節で既に述べたように, 特性方程式 (5.107) の根 λ_i , ($i=1, 2, 3$) の実数部がすべて負ならば, 変分 ξ_i , ($i=1\sim 10$) は時間の経過と共に零に収束し, 概周期解 (5.93) は振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, A_{3-2\nu}, B_\nu, B_{2-\nu}$, 位相角 $\varphi_1 (= \alpha_1)$, $\varphi_2 (= \alpha_{1-2\nu} - 2\beta_{2-\nu})$, $\varphi_3 (= \alpha_{3-2\nu} - 2\beta_{2-\nu})$, $\varphi_4 (= \alpha_{1-2\nu} + 2\beta_\nu)$, および周波数 ν に関して安定である。また既に第 5.8(b) 節で述べたように概周期解 (5.93) の各振幅, 位相角, および周波数を記述する式 (5.96) は, 位相角については $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, および φ_4 によって表わされ, 位相角 $\alpha_{1-2\nu}, \alpha_{3-2\nu}, \beta_\nu$,

あるいは $\beta_{2-\nu}$ は概周期解とは独立に任意の値をとることができる。このことは外力に同期化しない概周期振動の位相 $\alpha_{1-2\nu}$, $\alpha_{3-2\nu}$, β_ν , および $\beta_{2-\nu}$ は外力の位相から見れば常にずれることを意味する。

さらに外力の振幅 B と概周期解 (5.93) の各振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, $A_{3-2\nu}$, B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , 周波数 ν の関係を示す特性曲線が垂直接線を持つ点で安定限界となることを説明する。

まず外力の振幅 B と概周期解 (5.93) の各振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, $A_{3-2\nu}$, B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , 周波数 ν の関係を考える。定常状態では式 (5.104) より

$$X_i (B, x_1, x_2, \dots, x_{10}) = 0, \quad (i = 1 \sim 10) \quad (5.108)$$

となる。ただし式 (5.103) を用いて各振幅 A_1 , $A_{1-2\nu}$, $A_{3-2\nu}$, B_ν , $B_{2-\nu}$, 位相角 φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , 周波数 ν を x_j , ($j = 1 \sim 10$) で表わした。式 (5.108) より B を与えると x_j , ($j = 1 \sim 10$) が決まり、振幅特性曲線および周波数特性曲線 (Bx_j の関係) を求めることができる。式 (5.108) より次式を得る。

$$\frac{\partial X_i}{\partial B} dB + \frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_{10}} dx_{10} = 0, \quad (i = 1 \sim 10) \quad (5.109)$$

式 (5.109) を書き換えると

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dB} + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dB} + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_{10}} \frac{dx_{10}}{dB} = - \frac{\partial X_i}{\partial B} \quad (5.110)$$

となる。式 (5.110) より dx_j/dB , ($j = 1 \sim 10$) を求めると

$$\frac{dx_j}{dB} = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} & & & j \text{ 列} & & \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & - \frac{\partial X_1}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & - \frac{\partial X_2}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_{10}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{10}}{\partial x_2} & \dots & - \frac{\partial X_{10}}{\partial B} & \dots & \frac{\partial X_{10}}{\partial x_{10}} \end{vmatrix} \quad (5.111)$$

ここに

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_{10}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial X_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial X_{10}}{\partial x_{10}} \end{vmatrix} \quad (5.112)$$

を得る。つぎに Routh-Hurwitz の安定条件より $\Delta = \Delta(0) = 0$ なる点では安定限界となる。従って振幅特性曲線および周波数特性曲線 (Bx_j の関係) が垂直接線 ($dx_j/dB \rightarrow \infty$) を有する点で安定限界 ($\Delta(0) = 0$) となる。

数 値 例

周波数 ν が 1 より大きい場合の周期解は式 (5.14) で示される。第 2 高調波解および第 3 高調波解の振幅特性をそれぞれ式 (5.86) および式 (5.87) より求め、その結果を図 5.10 および図 5.11 に示す。系のパラメタは

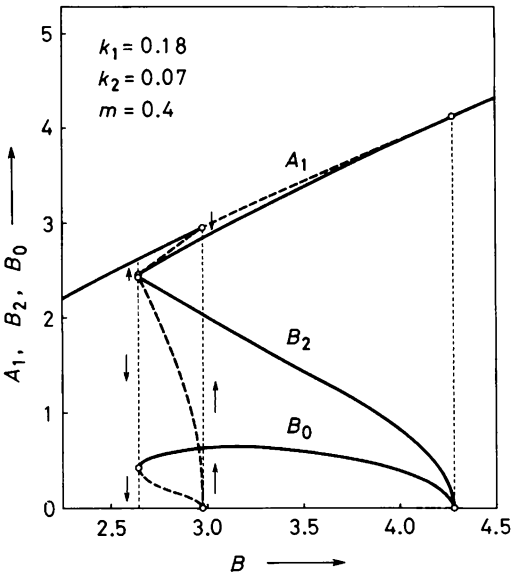


図 5.10 第 2 高調波振動の振幅特性.

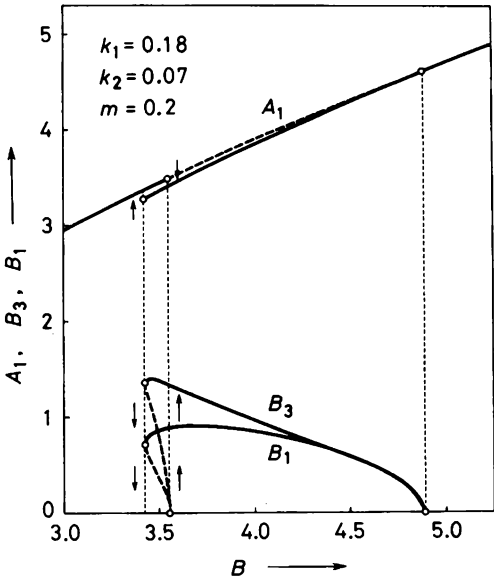


図 5.11 第 3 高調波振動の振幅特性.

$B = 2.65$ の場合の概周期解 (5.93) の周波数 ν , 各振幅 $A_1, A_{1-2\nu}, A_{3-2\nu}, B_\nu, B_{2-\nu}$, 位相角 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, および φ_4 を表 5.9 に示す。また変分方程式 (5.106) で表わされる系の特性根を求め, 式 (5.96) の特異点を分類した。それらの結果を表 5.10 に示す。

表 5.9 $B = 2.65$ の場合の概周期解 (5.93)

概周期解	ν	A_1	$A_{1-2\nu}$	$A_{3-2\nu}$	B_ν
(1)	1.1223 ...	2.5948	0.0177	0.1083	1.5486
(2)	1.0540 ...	2.6043	0.0379	0.0736	1.2889

概周期解	$B_{2-\nu}$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
(1)	0.9601	- 1.3982	2.4187	0.3263	2.9878
(2)	1.0428	- 1.41113	2.4618	0.2229	3.0137

表 5.10 変分方程式 (5.106) で表わされる系の特性根と式 (5.96) の特異点の分類

概周期解	式 (5.106) で表わされる系の特性根	式 (5.96) の特異点の分類
(1)	- 0.00206, - 4.9846 ± 1.3709 i	Stable focus
(2)	0.00067, - 2.5538, - 5.3628	Saddle (unstable)

図 5.12 において外力の振幅 B を 0.8 から大きくすると, $B = 1.89$ までは b は振動しない。 $B = 1.89$ で振動が励起し, $B = 1.30 \sim 3.17$ の範囲では基本調波振動は不安定である。この範囲内の $B = 2.60 \sim 2.68$ では固有周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動が発生する。なお $B = 1.30 \sim 2.60$ あるいは $B = 2.68 \sim 3.17$ の範囲で発生する振動については第 5.10 節で考察する。^{*} 既に第 5.7 節において数値例を示したように, さらに外力の振幅 B を大きくすると, $B = 3.17 \sim 3.34$ の範囲で基本調波振動は安定である。また外力の振幅 B を小さくすると, $B = 0.90 \sim 1.30$ の範囲でも基本調波振動は安定である。

5.10 概周期振動の位相空間解析 ($\nu > 1$ の場合)

この節では基本調波振動が不安定となって発生する概周期振動について考察する。第 5.8 節

^{*} これらの範囲で発生する振動は外力に同期しているが, 振幅および位相角が変調されている。

で既に述べたように、固有周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動を発生する場合もあるが、外力に同期しているが振幅および位相角が変調された概周期振動を発生する場合もある。^[2, 29, 30] これらの振動を位相空間において解析する。

(a) 概周期振動に対応するリミットサイクル

既に第 5.7(a) 節で述べたように、式 (5.8) で表わされる非自律系における解を

$$a(\tau) = x_1(\tau) \sin \tau + y_1(\tau) \cos \tau, \quad b(\tau) = x_\nu(\tau) \sin \tau + y_\nu(\tau) \cos \tau \quad (5.116)$$

と仮定し、 $x_1(\tau)$ 、 $y_1(\tau)$ 、 $x_\nu(\tau)$ 、および $y_\nu(\tau)$ は時間の経過と共に緩やかに変化するものとした。この条件のもとに自律系の式 (5.70) すなはち

$$0 = X_1, \quad \frac{d y_1}{d \tau} = Y_1, \quad \frac{d x_\nu}{d \tau} = X_\nu, \quad \frac{d y_\nu}{d \tau} = Y_\nu \quad (5.117)$$

を導いた。式 (5.117) において時間 τ を消去して y_1 x_ν y_ν 空間に動作点 ($y_1(\tau)$, $x_\nu(\tau)$, $y_\nu(\tau)$) の軌跡すなはち積分曲線が求められる。 $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $X_\nu = 0$, および $Y_\nu = 0$ なる特異点は式 (5.8) の基本調波解に対応する。式 (5.117) で表わされる系が安定な特異点を持つ場合には基本調波解は安定である。これが不安定となり、式 (5.117) で表わされる系が y_1 x_ν y_ν 空間に安定なリミットサイクルを持つ場合には動作点 ($y_1(\tau)$, $x_\nu(\tau)$, $y_\nu(\tau)$) は時間の経過と共にリミットサイクルに沿って動き続ける。換言すれば、振幅および位相角が定常状態においても一定値に落ち着かないで周期的に変化する概周期振動が発生する。

式 (5.117) を計算機を用いて解き、定常状態における x_1 , y_1 , x_ν , および y_ν を求める。これらを用いて式 (5.116) および式 (5.117) より a , b , および $db/d\tau$ を計算し、時間 $\tau = 2n\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) の時点での値を a b $db/d\tau$ 空間に写像する。^{*} 式 (5.116) および式 (5.117) より

$$\left. \begin{aligned} a(2n\pi) &= y_1(2n\pi) \\ b(2n\pi) &= y_\nu(2n\pi) \\ db(2n\pi)/d\tau &= Y_\nu + x_\nu(2n\pi) \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

^{*} 式 (5.117) で表わされる自律系におけるリミットサイクルと式 (5.8) で表わされる非自律系における不変閉曲線を比較するため、リミットサイクルを a b $db/d\tau$ 空間に写像した。なお式 (5.8) は a について 1 階、 b について 2 階の連立微分方程式であり、不変閉曲線は a b $db/d\tau$ 空間に写像した。

の関係がある。ただし $db(2n\pi)/d\tau$ は時間 $\tau = 2n\pi$ における $db/d\tau$ を表わす。

まず、系のパラメタが

$$k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.05, \quad m = 1.0, \quad B = 1.9 \quad (5.119)$$

の場合の数値例を考える。これらのパラメタの値を用いて式 (5.117) より x_1, y_1, x_v , および y_v を求め、これらを式 (5.118) を用いて $a, b, db/d\tau$ に変換する。動作点は図 5.13 のリミットサイクルに沿って動く。隣り合った2点の時間間隔は 2π すなはち外力の1サイクルに

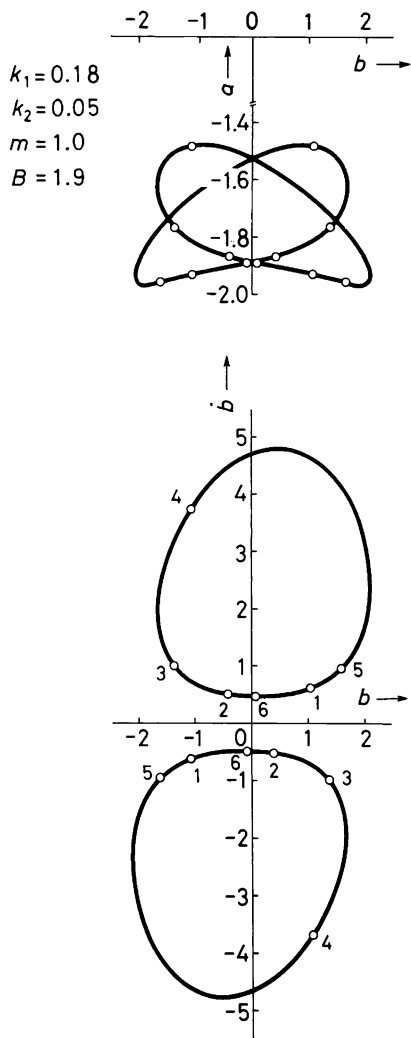


図 5.13 外力に同期化した概周期振動に対応するリミットサイクル(式 (5.117) の解の時間 $\tau = 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ における $a \ b \ db/d\tau$ 空間への写像)。

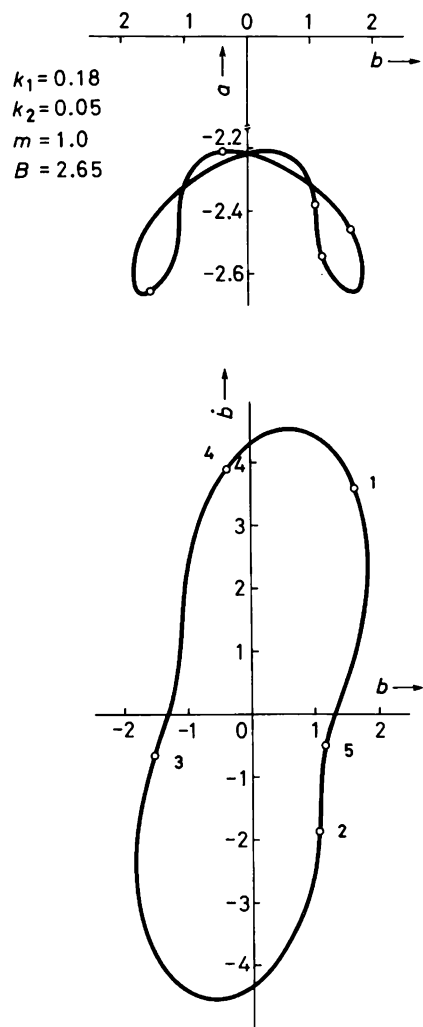


図 5.14 外力に同期化しない概周期振動に対応するリミットサイクル(式 (5.117) の解の時間 $\tau = 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ における $a \ b \ db/d\tau$ 空間への写像)。

等しく、数字 1, 2, 3, ……を添えた動作点はそれぞれ時間 $\tau = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ の時点での点 $(b, db/d\tau)$ である。

つぎに、系のパラメタが

$$k_1 = 0.18, \quad k_2 = 0.05, \quad m = 1.0, \quad B = 2.65 \quad (5.120)$$

の場合の数値例を考える。これらのパラメタの値を用いて計算されたリミットサイクルを図 5.14 に示す。リミットサイクルを 1 周するに要する時間は $2\pi \times 3.48\dots$ である。これら 2 つの数値例を比較することにより、図 5.13 および図 5.14 に示すように 2 つの型の概周期振動が考えられる。前者は a 軸に対称に 2 つの分離したリミットサイクルを有し、これらのリミットサイクルの $b, db/d\tau$ 平面への投影は内部に原点を含まない。この場合には振動の振幅および位相角は変調されているが、概周期振動は外力に同期化し、平均周波数は外力周波数に等しい。図 5.14 において 2 つのリミットサイクルが結合して 1 つの閉曲線を形成し、閉曲線の $b, db/d\tau$ 平面への投影は内部に原点を含む。この場合動作点がリミットサイクル上を 1 周すると位相が 2π すなわち外力の 1 サイクルだけ移相するので概周期振動は外力に同期化していない。動作点がリミットサイクルを 1 周するに要する時間が $2\pi \times 3.48\dots$ であるから平均周波数 ν は $1.15\dots$ である。

(b) 変換法を用いた位相空間解析

式 (5.8) で表わされる系に概周期振動が発生する場合には、 $a, b, db/d\tau$ 空間における時間 $\tau = 2n\pi$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) の時点での点 $(a(\tau), b(\tau), db(\tau)/d\tau)$ の写像は定常状態において 1 つの不変閉曲線上にある。

式 (5.8) を計算機で解いて得られる数値例を前節の数値解析の結果と比較するために、式 (5.119) および式 (5.120) で与えられるパラメタと同じものを用いる。これらの場合に対応して式 (5.8) を計算機で解いて不変閉曲線を求めた。その結果をそれぞれ図 5.15 および図 5.16 に示す。図において数字 1, 2, 3, ……を添えた点は時間 $\tau = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ の時点での点 $(b, db/d\tau)$ である。これらの閉曲線は前節における数値解析の結果 (図 5.13 および図 5.14) と概ね一致する。また図 5.16 に示した閉曲線に対応する概周期振動の平均周波数 ν は $1.22\dots$ である。

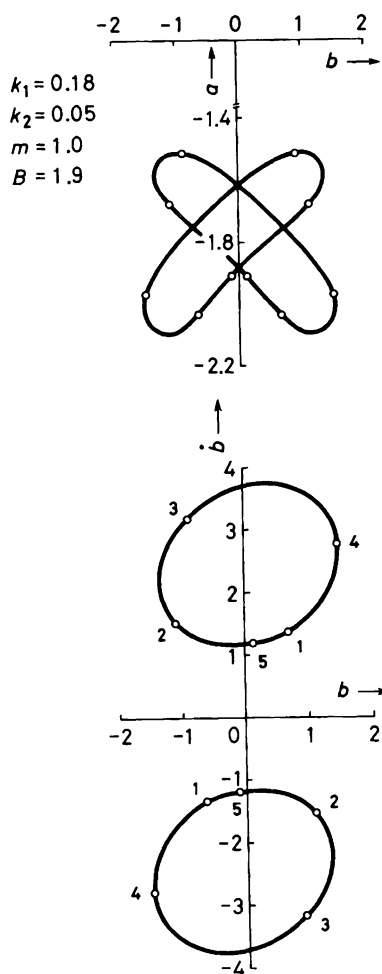


図 5.15 外力に同期化した概周期振動に対応する不変閉曲線。

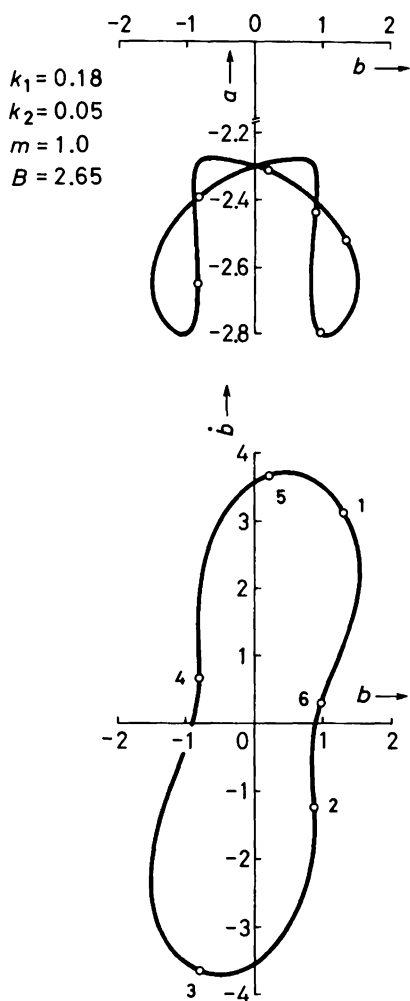


図 5.16 外力に同期化しない概周期振動に対応する不変閉曲線。

第6章 変圧器結合回路に発生する定常振動の実験的考察

6.1 緒 言

図 6.1 に示すような 2つの可飽和鉄心を持つ変圧器結合回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する定常振動について実験的に考察する。この振動回路は $\frac{1}{2}$ 調波振動を発生するパラメトリック励振回路として知られ、ある回路条件では、この回路に基本調波振動あるいは第2高調波、第3高調波等の高調波振動の発生することが判っていた。^[1] さらに1943年の文献[3]の実験結果によれば、これらの振動以外に外力周波数と簡単な整数比(m/n)をなす周波数成分が顕著に現われる場合もあり、また外力に同期化しない概周期振動が発生する場合もあることが判った。これらの定常振動を考察するために、著者等はまず電気回路を用いて実験を行なった。外力に同期化した周期振動および同期化しない概周期振動を観察し、振動の周波数成分を分析した結果、これらの振動に含まれる主要周波数成分を一般的に考察することができた。^[4,7] つぎに、振動の周波数成分を理論的に考察し、外力に同期化した周期解のみでなく同期化しない概周期解も調波解析法を適用して求めた。^[5] これらの解析結果を第5章で述べた。この章では理論的に求めた定常解を検討するために、電気回路に発生する振動を調べ、周期振動および概周期振動の振幅特性および周波数特性を求めて、解析結果と比較検討する。^[7]

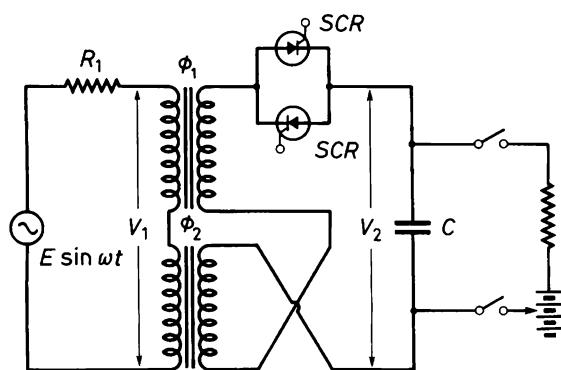


図 6.1 実験回路。

6.2 実験回路

実験回路を図 6.1 に示す。実験に用いたリアクトルの特性は、実験結果を解析結果と比較す

るために3次特性に近づけた。そのためには鉄心に空隙を設けたリアクトルと空隙のないリアクトルを直列に接続して図 6.2 に示すような特性のリアクトルを合成した。^{*[1]} 電源電圧の任意の位相において振動を開始させるために逆並列に接続した SCR を用いた。

6.3 振動発生領域と周波数特性

初期条件として、2 次回路閉路時の電源電圧位相および容量 C の初期充電電圧を適当に与えると、 LC 共振回路に種々の振動が発生する。抵抗 R_1 を 24Ω とし、電源電圧の大きさと容量 C を変えて各振動の発生領域を求めた。実験結果を図 6.3 および図 6.4 に示す。図において各振動の発生領域を斜線で示す。図 6.4 の領域は図 6.3 内では小さくなるので拡大して示した。領域内の数字は振動の調波を示し、電源電圧の

周波数を 1 とした場合の LC 共振回路に発生する振動の主要成分の周波数である。またこれは固有周波数に近い周波数 ν である。図 6.3 および図 6.4 の点線の斜線で示した領域では同期化しない概周期振動が発生し、その平均周波数は電源周波数の $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間に変化するものと、1 と $\frac{1}{2}$ の間に変化するものがある。これらの平均周波数をそれぞれ図 6.5 および図 6.6 に示した。ただし、図 6.5 の斜線を施した狭い領域では、電源周波数の $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、および $\frac{3}{4}$ の周波数 ν を持つ周期振動が発生する。図 6.3、図 6.4、および図 6.5 において概ね容量 C を小さくすると共振回路に発生する振動の固有周波数は大きくなり、また電源電圧の振幅を大きくするに従って振動磁束の振幅が大きくなり、リアクトルの等価的インダクタンスが小さくなるので、固有周波数が大きくなると考えられる。

図 6.3 および図 6.4 に示すように、 $\frac{1}{3}$ 調波振動、 $\frac{1}{2}$ 調波振動、基本調波振動、 $\frac{3}{2}$ 調波振動、第 2 高調波振動、および第 3 高調波振動は比較的広い同期化領域を持つ。第 5 章ではこれらの周期振動が外力に同期化することを示した。

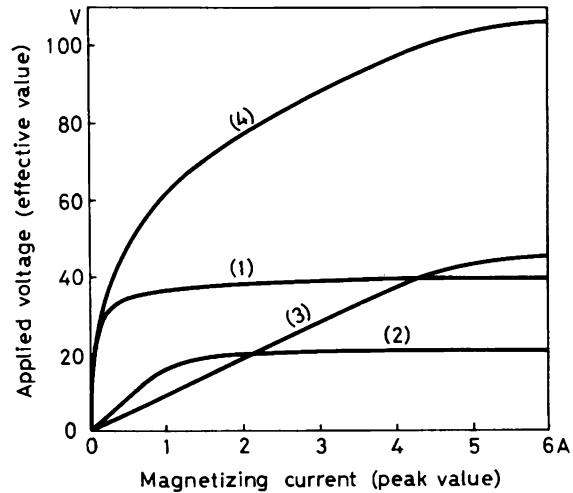


図 6.2 3 次曲線に近似したリアクトルの特性。
(1)：空隙を有しないリアクトル，
(2)，(3)：空隙を有するリアクトル，
(4)：(1)，(2)，および(3)の合成特性。

^{*} さらに詳しいことは附録 II で述べる。

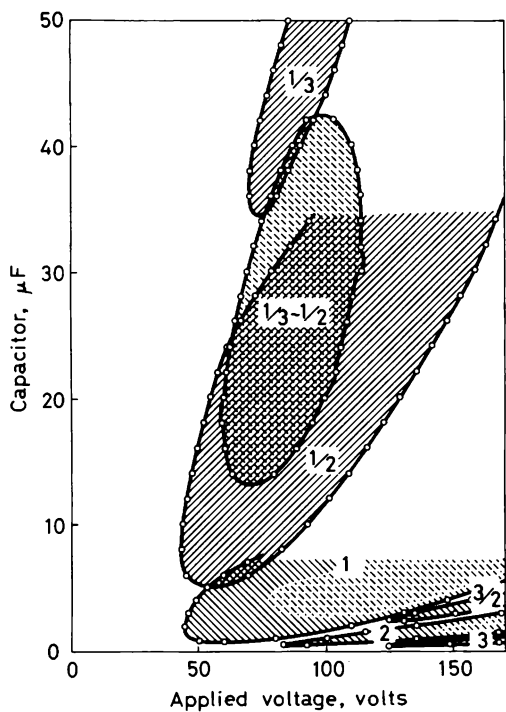


図 6.3 振動発生領域 (その 1).

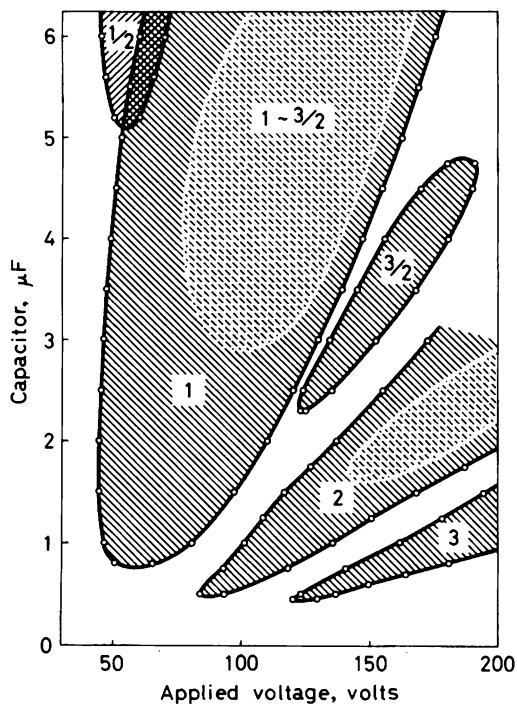


図 6.4 振動発生領域 (その 2).

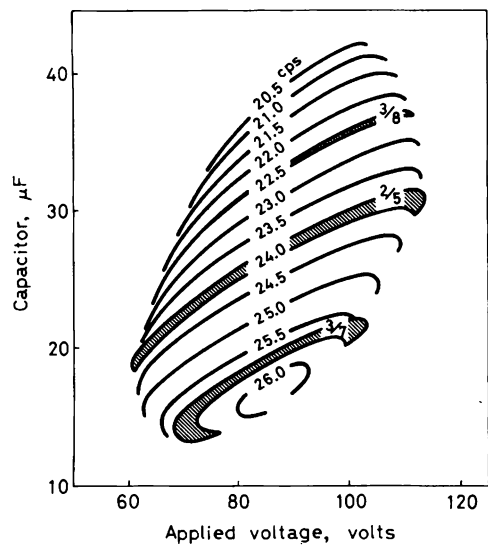


図 6.5 平均周波数が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動の周波数特性.

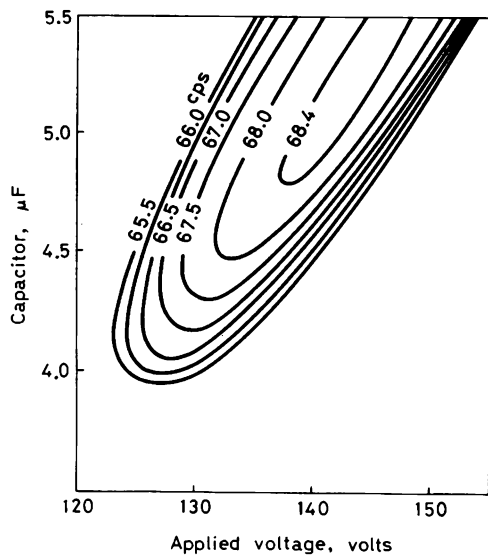


図 6.6 平均周波数が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動の周波数特性.

6.4 理論的考察との比較

図 6.2 に示したリアクトルの特性は、電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E と電流の波高値 I の関係で示すと次式で与えられる。

$$I = 1.53 E^3 \times 10^{-7} \text{ [A]} \quad (6.1)$$

コイルの巻数を n とすると、鉄心中の磁束の振幅 Φ と電圧 $E \sin \omega t$ の振幅 E との間には次の関係がある。

$$E = n \omega \Phi \quad (6.2)$$

電源周波数 ω は 60 [Hz] であり、

$$C_n = 5 \text{ } [\mu\text{F}] \quad (6.3)$$

としたので、式 (5.4)，式 (6.1)，および式 (6.2) より次式を得る。

$$n \omega \Phi_n = 70.0 \text{ [V]}, \quad I_n = 0.532 \text{ [A]} \quad (6.4)$$

図 6.3 に示した振動発生領域において、容量 C を 50 $[\mu\text{F}]$ ，20 $[\mu\text{F}]$ ，5 $[\mu\text{F}]$ ，4 $[\mu\text{F}]$ ，2 $[\mu\text{F}]$ ，および 1 $[\mu\text{F}]$ とし、電源電圧の振幅 E を変えて鉄心中の振動磁束 $\phi_1 + \phi_2$ および $\phi_1 - \phi_2$ の周波数成分を求めた*。各周波数成分の振幅特性および周波数特性を図 6.7～図 6.14 に示す。実験結果と解析結果を定量的に比較するため、容量 C ，電源電圧の振幅 E ，磁束 $\phi_1 + \phi_2$ ，および $\phi_1 - \phi_2$ を式 (6.3) および式 (6.4) を用いてそれぞれ式 (5.8) におけるパラメタ m ， B ，変数 a ，および b に換算し、電源周波数を 1 とした。また a および b の周波数成分の振幅を A_1 ， $A_{1-2\nu}$ ， B_ν あるいは $B_{2-\nu}$ 等で表わし、周波数を添字で示した。

図 6.7 および図 6.8 に示すように、 b の主要成

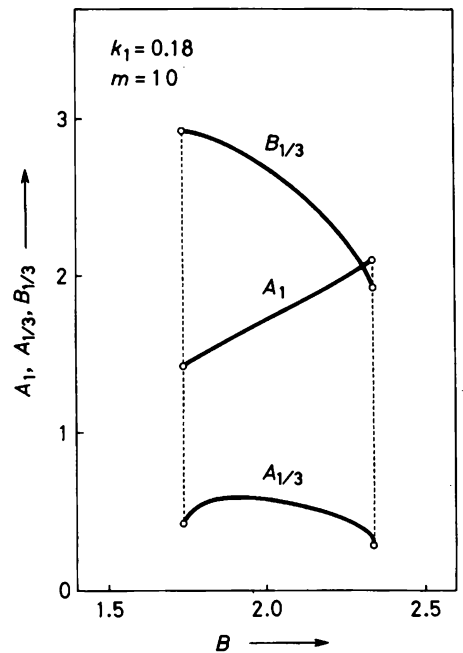


図 6.7 $\frac{1}{3}$ 調波振動の振幅特性。

* ヘテロダイン式波形分析器を使用した。

分の周波数は共振回路の固有周波数に近い周波数 ν であると考えられ、 a の主要成分の周波数は1および $1-2\nu$ である。これらの周波数成分は式(5.13)の周波数成分と一致する。図6.8において $B=1.26\sim 2.02$ では初期条件によって $\frac{1}{2}$ 調波振動あるいは平均周波数 ν が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動のいずれかが発生する。概周期振動の平均周波数 ν は電源電圧の振幅を変えるとそれにつれて連続的に変化し、共振回路の固有周波数に等しいと考えられる。 $m=4.0$ とし、抵抗 R_1 および電源電圧の振幅 E を変えて、概周期振動の周波数特性を求め、その結果を図6.9に示した。図6.9を解析で得られた図5.5と比較すると、電源周波数の $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、および $\frac{2}{3}$ の周波数 ν を持つ周期振動が外力に同期化することを除いては実験結果と解析結果は概ね一致する。

図6.10に示すように、 $m=1.0$ では基本調波振動および概周期振動が発生する。図6.10において B を零から大きくすると、 $B=2.0$ で LC 共振回路に振動が励起する。 B を増加すると、 $B=3.25$ まで振動が存在し、 B を減少すると、 $B=1.05$ で振幅が跳躍し零となり b は振動しなくなる。基本調波振動は、 $B=1.05\sim 1.66$ および $B=3.10\sim 3.25$ では安定であるが、

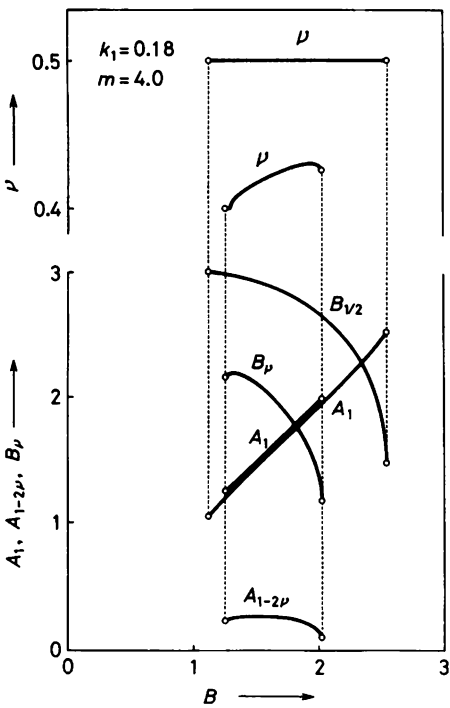


図 6.8 $\frac{1}{2}$ 調波振動および平均周波数が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の概周期振動の振幅特性および周波数特性。

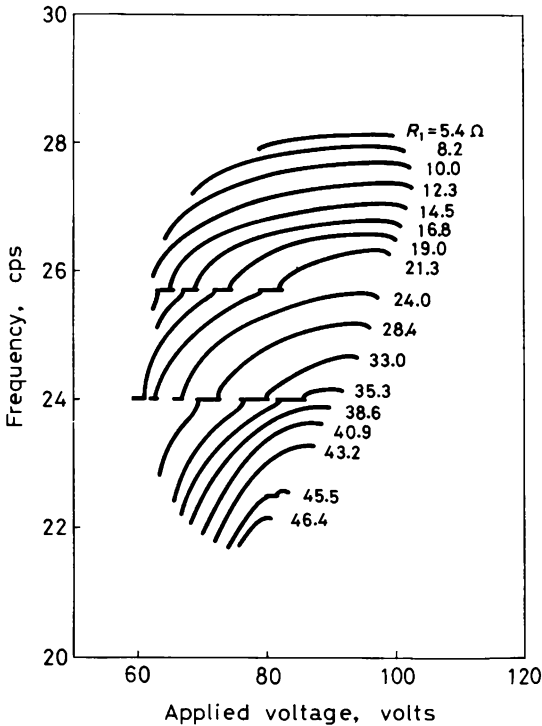


図 6.9 平均周波数が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の同期化しない概周期振動の周波数特性。

$B = 1.66 \sim 3.10$ では不安定となる。基本調波振動が不安定となる B の範囲内で、 $B = 1.66 \sim 2.58$ および $B = 3.02 \sim 3.10$ では振動は電源電圧に同期化しているが、振幅および位相は変調し、周波数 ν' および $2 - \nu'$ の周波数成分を含む。 $B = 2.58 \sim 3.02$ では振動は電源電圧に同期化せず、その平均周波数 ν は 1 と $\frac{3}{2}$ の間にある。 b の主要成分は式 (5.93) の周波数成分に等しい。図 6.10 を解析で得られた図 5.12 と比較すると概ね良好な一致を得た。基本調波振動が不安定となる B の範囲では、電源電圧に同期化しているが振幅および位相が変調している概周期振動と平均周波数 ν が 1 と $\frac{3}{2}$ の間の同期化しない概周期振動が発生する。これらの振幅の最大値および最小値を図 6.11 に示す。

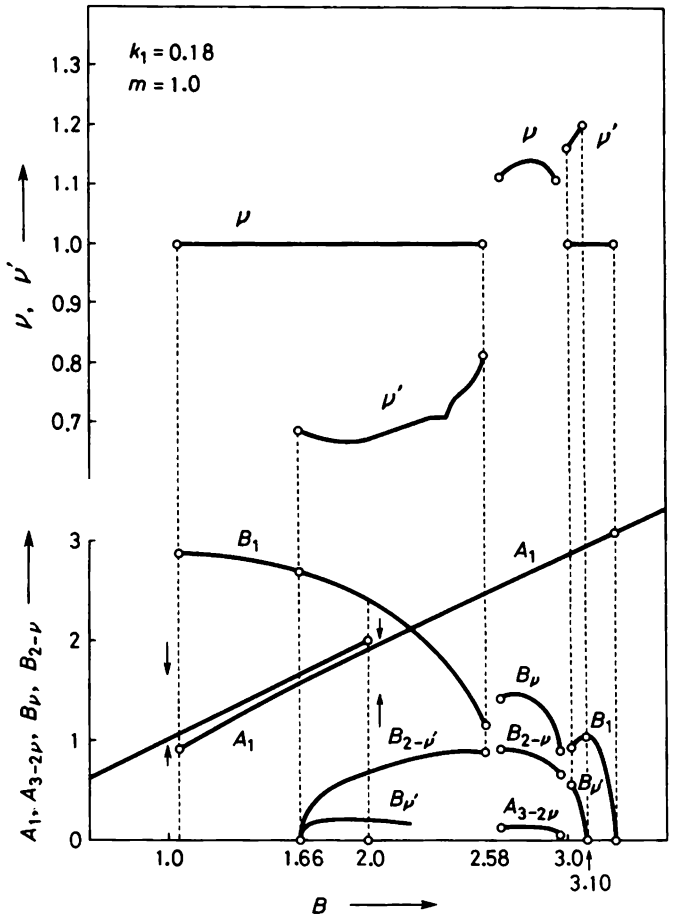


図 6.10 基本調波振動および概周期振動の振幅特性および周波数特性。

$\frac{3}{2}$ 調波振動，第 2 高調波振動，および第 3 高調波振動の振幅特性をそれぞれ図 6.12，図 6.13，および図 6.14 に示した。図 6.13 において第 2 高調波振動は $B = 2.77 \sim 3.01$ および $B = 3.81 \sim 4.14$ では安定であるが $B = 3.01 \sim 3.81$ では不安定となる。第 2 高調波振動が不安定となる B の範囲では、振動は電源電圧に同期化しているが振幅および位相は変調し、周波数 ν' および $2 - \nu'$ の周波数成分を含む。図 6.12，図 6.13，および図 6.14 に示すように b の主要成分の周波数は ν および $2 - \nu$ であり，これらの周波数成分は式 (5.14) の周波数成分と一致する。

各振動の磁束 $\phi_1 + \phi_2$ ， $\phi_1 - \phi_2$ ，電圧 V_2 ，および電源電圧 V の時間的変化を観察した結果を図 6.15-1 ～ 図 6.15-4 に示す。磁束 $\phi_1 + \phi_2$ ， $\phi_1 - \phi_2$ ，電圧 V_2 はそれぞれ a ， b ，および $db/d\tau$ に比例する。磁束および電圧の波形は各振動の振幅特性を求めた場合の容量 C と同じものを

用いて求めた。オシログラム(a)，
(b)，および(c)にはそれぞれ $\frac{1}{3}$ 調波
振動，電源電圧に同期化しない概
周期振動，および $\frac{1}{2}$ 調波振動の磁
束および電圧波形を示した。概周
期振動の平均周波数 ν は0.42…
であり，第5.6(b)節において式
(5.8)を解いて得られた概周期振
動の平均周波数 ν にほぼ等しい。
位相解析を行なって，概周期振動
に対応する位相平面における閉曲
線を求める。オシログラム(b)に
おいて，電源電圧の零ボルト時に
おける磁束 $\phi_1-\phi_2$ および電圧 V_2 を

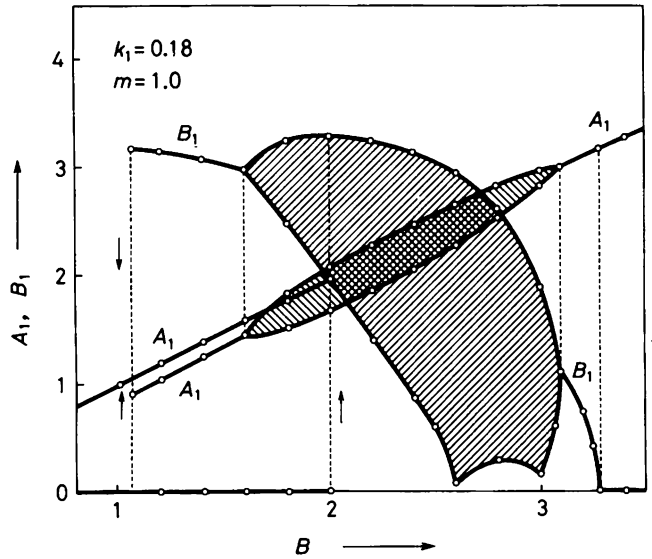


図 6.11 基本調波振動および概周期振動の振幅の最大値および最小値。

求め，これらを $b \, db/d\tau$ 平面に写像する。これらの点を結んで得られる閉曲線を図 6.16 に示す。図において数字 n ($n=1, 2, \dots$) を添えた点の電源電圧の 1 サイクル経過後の写像はそれぞれ数字 $n+1$ を添えた点である。図 6.16 を解析で得られた図 5.7 と比較すると概ね良好な一致を得た。

オシログラム (d) に基本調波振動の磁束および電圧波形を示した。また基本調波振動が不安定となって発生する概周期振動をオシログラム (e) および (f) に示した。系のパラメタは

$$\text{オシログラム (e): } k=0.18, \quad m=1.0, \quad B=1.90 \quad (6.5)$$

$$\text{オシログラム (f): } k=0.18, \quad m=1.0, \quad B=2.65 \quad (6.6)$$

である。平均周波数 ν が $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間の概周期振動と同様に位相解析を行ない，これらの概周期振動に対応する位相平面上の閉曲線を求めた。その結果を図 6.17 および図 6.18 に示す。これらの実験結果を比較することにより図 6.17 および図 6.18 に示すように 2 つの型の概周期振動のあることが判る。前者は原点に対して対称に 2 つの分離した閉曲線を持ち，閉曲線は内部に原点を含まない。この場合，振動の振幅および位相は変調されても，振動は電源電圧に同期化している。図 6.18 において 2 つの閉曲線が結合して 1 つの閉曲線を形成し，閉曲線は内部に原点を含むので振動は電源電圧に同期化していない。後者の平均周波数 ν は 1.12…である。これらの実験結果を解析で得られた図 5.15 および図 5.16 と比較すると概ね良好な一致を得た。

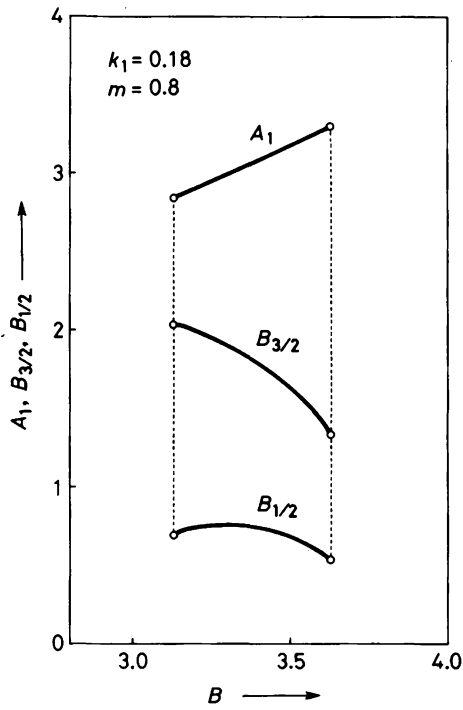


図 6.12 $\frac{3}{2}$ 調波振動の振幅特性.

オシログラム (g), (h), および (j) にはそれぞれ $\frac{3}{2}$ 調波振動, 第2高調波振動, および第3高調波振動の磁束および電圧波形を示した。また第2高調波振動が不安定となって概周期振動が発生する場合がある。これをオシログラム (i) に示した。

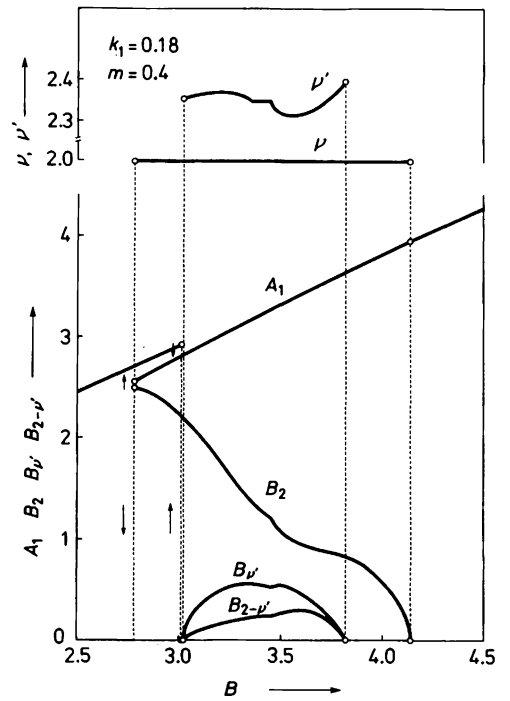


図 6.13 第2高調波振動および概周期振動の振幅特性および周波数特性.

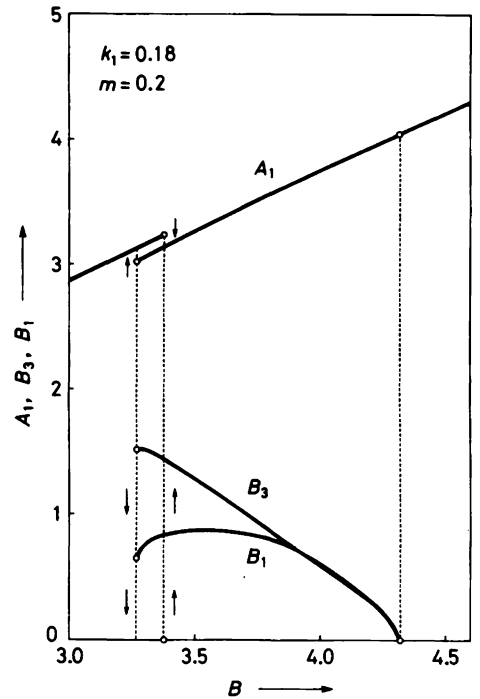
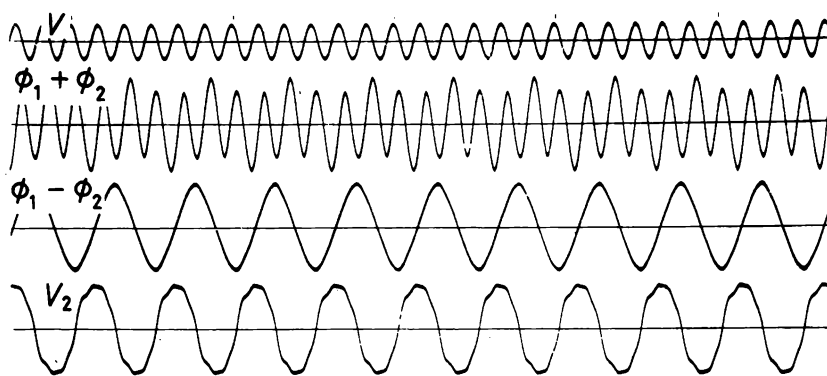
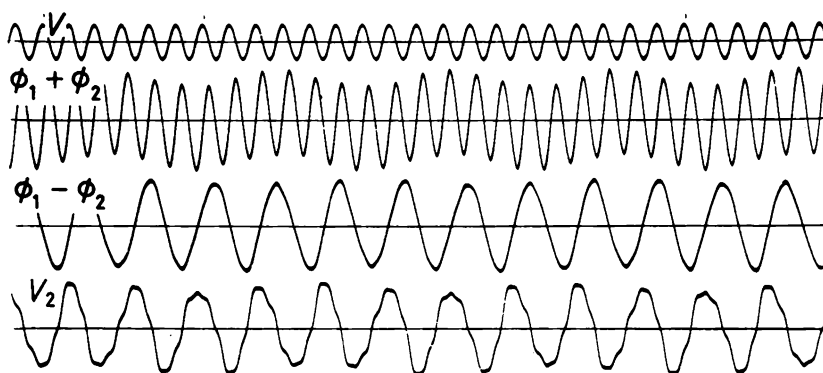


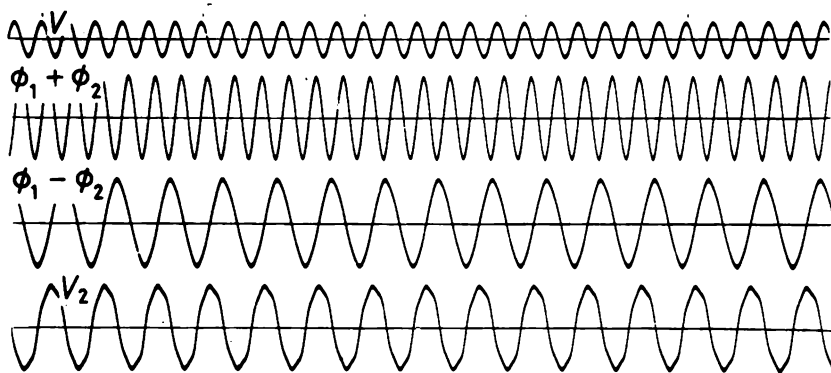
図 6.14 第3高調波振動の振幅特性.



(a) 1/3-harmonic oscillation ($m=10$, $B=1.8$)

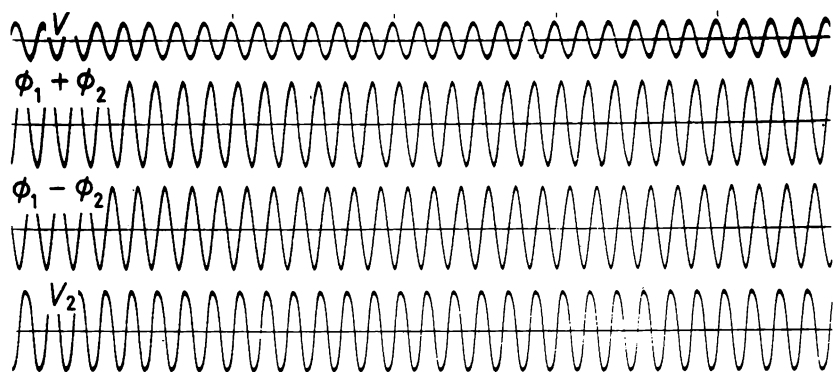


(b) 1/3-1/2-harmonic oscillation ($m=4.0$, $B=1.6$)

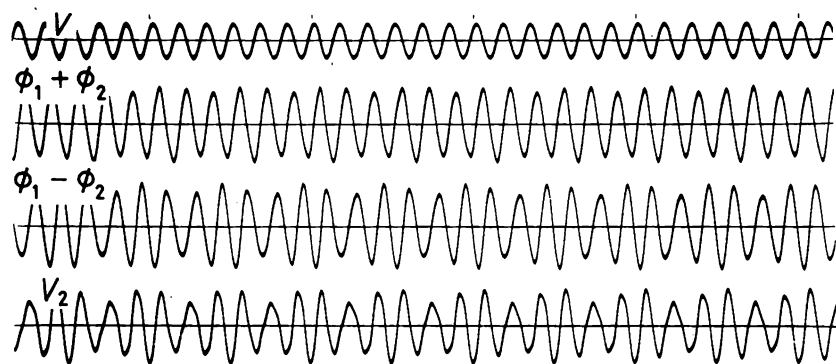


(c) 1/2-harmonic oscillation ($m=4.0$, $B=1.6$)

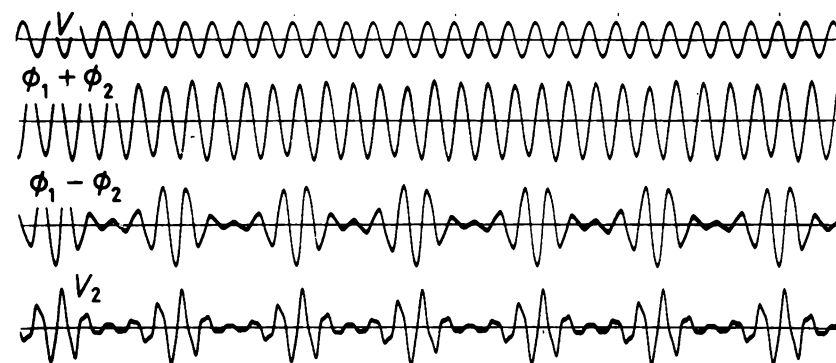
図 6.15-1 各振動の磁束 $\phi_1 + \phi_2$, $\phi_1 - \phi_2$, 電圧 V_2 , および電源電圧 V .



(d) Harmonic oscillation ($m=1.0$, $B=1.3$)

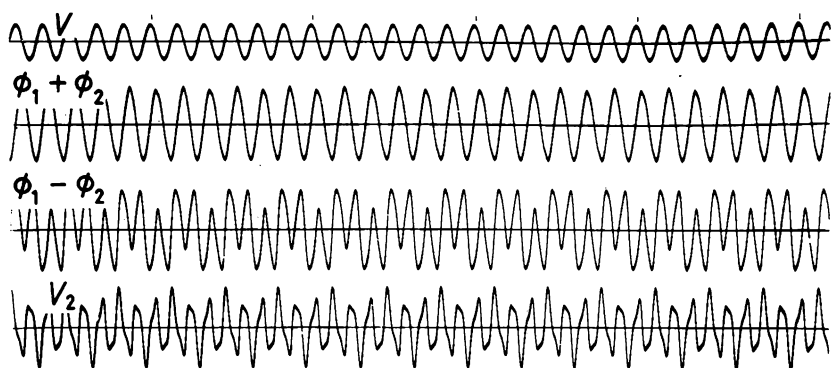


(e) 1-3/2-harmonic oscillation ($m=1.0$, $B=1.9$)

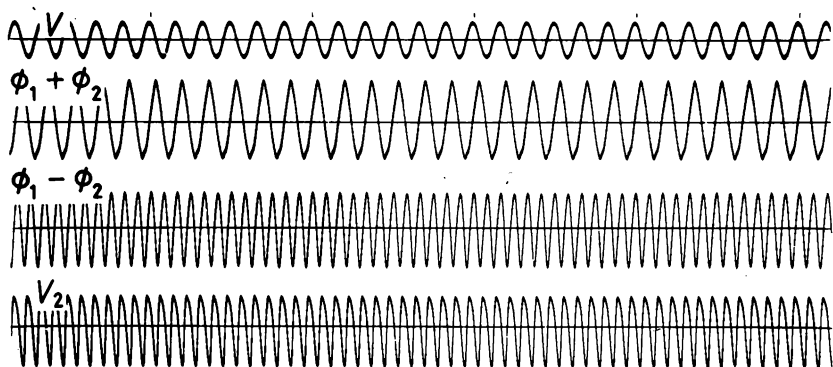


(f) 1-3/2-harmonic oscillation ($m=1.0$, $B=2.65$)

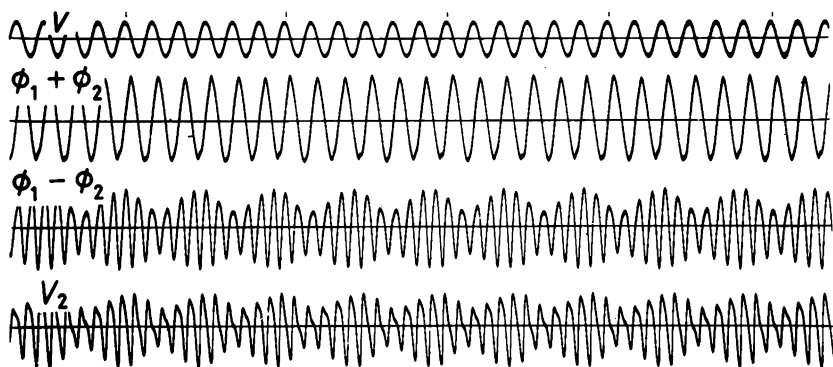
図 6.15-2 各振動の磁束 $\phi_1 + \phi_2$, $\phi_1 - \phi_2$, 電圧 V_2 , および電源電圧 V .



(g) 3/2-harmonic oscillation ($m=0.8$, $B=3.4$)

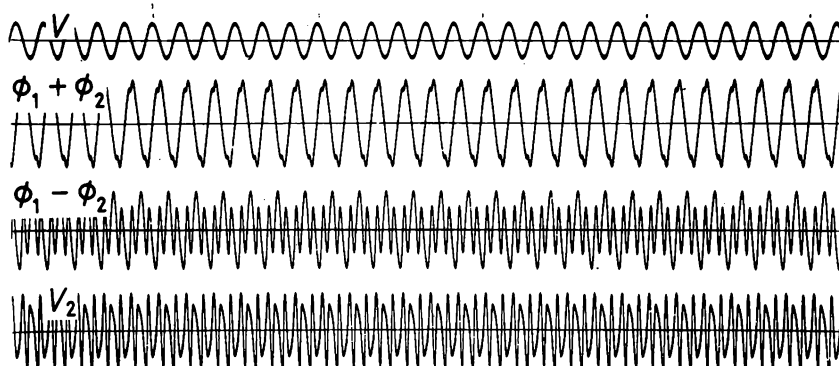


(h) 2nd harmonic oscillation ($m=0.4$, $B=2.9$)



(i) 2~5/2-harmonic oscillation ($m=0.4$, $B=3.3$)

図 6.15-3 各振動の磁束 $\phi_1 + \phi_2$, $\phi_1 - \phi_2$, 電圧 V_2 , および電源電圧 V .



(j) 3rd harmonic oscillation ($m=0.2$, $B=3.4$)

図 6.15-4 各振動の磁束 $\phi_1 + \phi_2$, $\phi_1 - \phi_2$, 電圧 V_2 , および電源電圧 V .

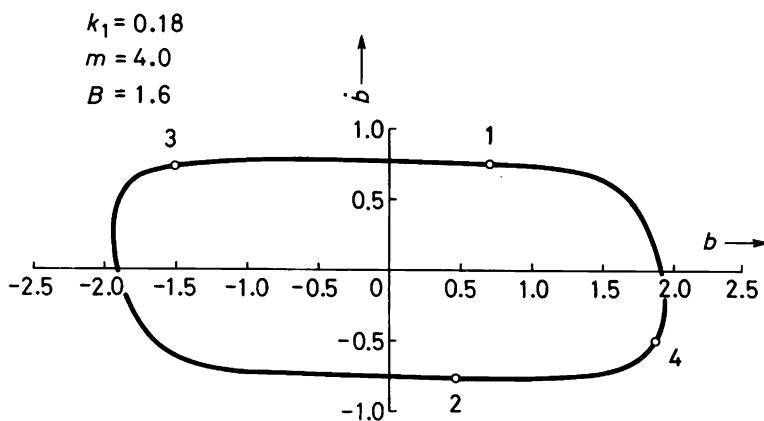


図 6.16 平均周波数が $0.42 \dots$ の同期化しない概周期振動に対応する不変閉曲線。

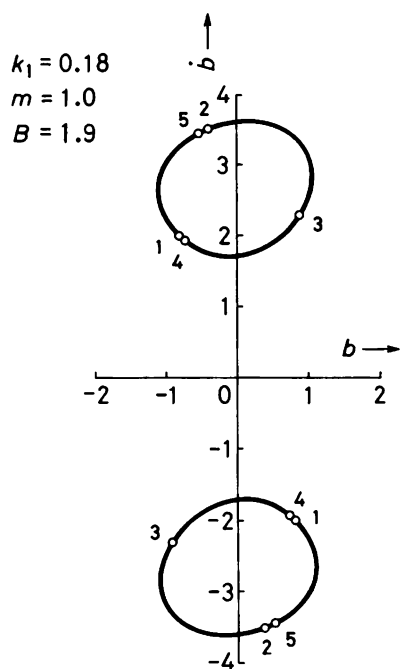


図 6.17 外力に同期化した概周期振動に対応する不変閉曲線。

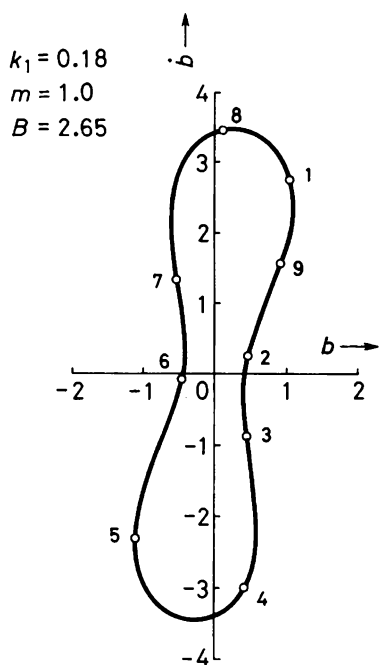


図 6.18 平均周波数が $1.12 \dots$ の同期化しない概周期振動に対応する不変閉曲線。

可飽和鉄心を持つ電気回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する定常振動について考察した。一般に非線形回路に周期的外力を加えると、外力周波数成分を持つ基本調波振動以外に、その高調波あるいは分数調波成分が顕著に現われる場合がある。また外力に同期化した周期振動を発生する場合が多いが、同期化しない概周期振動を発生する場合もある。この論文では、強制振動を記述する微分方程式を導き、定常解を調波解析法を適用して求め、またこれに対する実験結果を述べた。調波解析法を用いる場合には、まず定常解の周波数成分の選び方が問題となる。これまで計算機による数値計算あるいは電気回路における実験などにより存在の確かめられた周期解の主要周波数成分の大きさを、系のパラメタの広い範囲で決定するのに調波解析法を用いる場合が多かった。ここでは系に発生する振動の主要成分の周波数を一般的に考察し、調波解析法を適用して主要成分の周波数および振幅を決定して、周期解のみでなく概周期解も求めた。解に含まれる主要周波数成分は、外力周波数を1とすれば、これと共振回路の固有周波数に近い周波数 ν の成分であると考えられ、周波数 ν は、系のパラメタのみでなく振動の振幅にも依存すると考えられる。また非線形特性により定常解にはこれらの周波数以外の周波数成分が含まれる。解に含まれる主要成分の周波数を選ぶ方法として、系のパラメタの内、小さいものを無視して外力周波数および周波数 ν の成分を持つ第1次近似解を仮定し、その後繰返し法により解の近似を高めることにより主要成分の周波数を定める方法を考察した。高次の近似解を仮定して計算すれば、周期解および概周期解をとともに解析することができる。

第1部では、直列共振回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する周期振動について考察した。直列共振回路には、外力周波数成分を持つ基本調波振動以外に、外力周波数と整数比 m/n をなす周波数成分が顕著に現われる場合もある。第1章ではこれらの振動に含まれる主要成分の周波数を一般的に考察し、調波解析法を用いて定常解を求めた。また文献[1]に従って周期解の安定性を吟味した。その結果周期解を不安定にする周波数成分が判ると共に新しく励起する周期解を求めることができた。第2章では電気回路を用いて実験を行ない、解析結果と比較検討したところ、概ね良好な一致を得た。第3章では、鉄心中の磁束を直流偏極したリアクトルを持つ直列共振回路に発生する強制振動について理論的考察を行なった。その結果、磁束を直流偏極した場合には偶数次調波振動が発生しやすいと考えられる。また実験結果を第4章で示した。

第2部では変圧器結合回路に正弦波電圧を印加した場合に発生する周期振動および概周期振動について考察した。第5章では、これらの振動の主要周波数成分は外力周波数および固有周波数に近い周波数 ν の成分等であると考え、調波解析法を適用して周波数 ν および主要周波数成分の振幅を計算した。その結果、外力周波数と簡単な整数比をなす周波数 ν の成分を持つ周期解および一般には外力周波数と無理数比をなす周波数 ν の成分を持つ概周期解を得た。また概周期解の平均周波数 ν は系のパラメタを変えるとそれにつれて連続的に変化する。電気回路を用いて実験を行なった結果、これらの周期振動および概周期振動の発生することが判った。また位相解析を行なって概周期振動に対応する位相空間におけるリミットサイクルおよび不変閉曲線を求め、上の解析結果と比較検討したところ概ね良好な一致を得た。さらに、周期解および概周期解の安定性を吟味した。特に、概周期振動の位相は外力の位相から常に移相していくことを示し、概周期振動の振幅の安定性を論じた。

第6章では電気回路における振動を観察し、その発生領域を求めた。また電源電圧に同期化した周期振動および同期化しない概周期振動の主要周波数成分を分析し、振幅特性および周波数特性を求めた。これらの実験結果を解析結果と比較検討したところ概ね良好な一致を得た。

謝

辞

本研究は京都大学工学部林千博教授御指導のもとに行なわれたものであって、筆者が京都大学工学部電気工学科に在学中以来十余年に亘り終始御懇篤な御指導と御鞭撻を賜りました同教授にここに衷心より感謝の意を表します。

論文作成にあたっては浮田勇教授の御配慮を賜りました。また本研究に関して種々御教示御討論をいただきました西川禎一教授，安陪稔助教授，上田院亮助教授，および倉光正巳助手に深く感謝の意を表します。さらに計算および実験に御協力をいただきました林千博研究室の方々をはじめ電気系教室の各位に感謝します。

付録 I Hill の方程式の係数

第 1 章および第 3 章における Hill の方程式の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n は周期解 $v_0(\tau)$ の各振幅および位相角で表わされる。これらの係数を以下に示す。

I. 1 式 (1.74) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 4$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m}(A_1^2 + A_{1/2}^2 + 2A_0^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} [2A_{1/2}A_0 \cos \alpha_{1/2} - A_1A_{1/2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/2})]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} [2A_{1/2}A_0 \sin \alpha_{1/2} + A_1A_{1/2} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/2})]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} \left(\frac{1}{2}A_{1/2}^2 \sin 2\alpha_{1/2} + 2A_1A_0 \cos \alpha_1 \right)$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} \left(-\frac{1}{2}A_{1/2}^2 \cos 2\alpha_{1/2} + 2A_1A_0 \sin \alpha_1 \right)$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} A_1A_{1/2} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/2})$$

$$\theta_{3c} = -\frac{3}{2m} A_1A_{1/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/2})$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1$$

$$\theta_{4c} = -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1$$

I. 2 式 (1.84) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 5$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m}(A_1^2 + A_{3/5}^2 + A_{1/5}^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1s} &= \frac{3}{2m} [-A_1 A_{3/5} \sin(\alpha_1 - \alpha_{3/5}) - A_{3/5} A_{1/5} \sin(\alpha_{3/5} - \alpha_{1/5}) + \frac{1}{2} A_{1/5}^2 \sin 2\alpha_{1/5}] \\
\theta_{1c} &= \frac{3}{2m} [A_1 A_{3/5} \cos(\alpha_1 - \alpha_{3/5}) + A_{3/5} A_{1/5} \cos(\alpha_{3/5} - \alpha_{1/5}) - \frac{1}{2} A_{1/5}^2 \cos 2\alpha_{1/5}] \\
\theta_{2s} &= \frac{3}{2m} [-A_1 A_{1/5} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/5}) + A_{3/5} A_{1/5} \sin(\alpha_{3/5} + \alpha_{1/5})] \\
\theta_{2c} &= \frac{3}{2m} [A_1 A_{1/5} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/5}) - A_{3/5} A_{1/5} \cos(\alpha_{3/5} + \alpha_{1/5})] \\
\theta_{3s} &= \frac{3}{2m} [A_1 A_{1/5} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/5}) + \frac{1}{2} A_{3/5}^2 \sin 2\alpha_{3/5}] \\
\theta_{3c} &= -\frac{3}{2m} [A_1 A_{1/5} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/5}) + \frac{1}{2} A_{3/5}^2 \cos 2\alpha_{3/5}] \\
\theta_{4s} &= \frac{3}{2m} A_1 A_{3/5} \sin(\alpha_1 + \alpha_{3/5}) \\
\theta_{4c} &= -\frac{3}{2m} A_1 A_{3/5} \cos(\alpha_1 + \alpha_{3/5}) \\
\theta_{5s} &= \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1 \\
\theta_{5c} &= -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1
\end{aligned}$$

I. 3 式 (1.98) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 6$)

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{2/3}^2 + A_{1/3}^2 + 2A_0^2) \\
\theta_n^2 &= \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}} \\
\theta_{1s} &= \frac{3}{2m} [-A_1 A_{2/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{2/3}) - A_{2/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{2/3} - \alpha_{1/3}) + 2A_{1/3} A_0 \cos \alpha_{1/3}] \\
\theta_{1c} &= \frac{3}{2m} [A_1 A_{2/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{2/3}) + A_{2/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{2/3} - \alpha_{1/3}) + 2A_{1/3} A_0 \sin \alpha_{1/3}] \\
\theta_{2s} &= \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \sin 2\alpha_{1/3} - A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) + 2A_{2/3} A_0 \cos \alpha_{2/3} \right] \\
\theta_{2c} &= \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \cos 2\alpha_{1/3} + A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) + 2A_{2/3} A_0 \sin \alpha_{2/3} \right]
\end{aligned}$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} [A_{2/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{2/3} + \alpha_{1/3}) + 2 A_1 A_0 \cos \alpha_1]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} [-A_{2/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{2/3} + \alpha_{1/3}) + 2 A_1 A_0 \sin \alpha_1]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_{2/3}^2 \sin 2\alpha_{2/3} + A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/3})]$$

$$\theta_{4c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_{2/3}^2 \cos 2\alpha_{2/3} - A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/3})]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} A_1 A_{2/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{2/3})$$

$$\theta_{5c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_{2/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{2/3})$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{4m} A_1^2 \sin 2\alpha_1$$

$$\theta_{6c} = -\frac{3}{4m} A_1^2 \cos 2\alpha_1$$

I. 4 式 (1.111) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 6$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = -\frac{3}{2m} [A_1 A_{1/2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) + A_1 A_{3/2} \sin(\alpha_{3/2} - \alpha_1)]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} [A_1 A_{1/2} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) + A_1 A_{3/2} \cos(\alpha_{3/2} - \alpha_1)]$$

$$\theta_{2s} = -\frac{3}{2m} [A_{3/2} A_{1/2} \sin(\alpha_{3/2} - \alpha_{1/2}) - \frac{1}{2} A_{1/2}^2 \sin 2\alpha_{1/2}]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} [A_{3/2} A_{1/2} \cos(\alpha_{3/2} - \alpha_{1/2}) - \frac{1}{2} A_{1/2}^2 \cos 2\alpha_{1/2}]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} A_1 A_{1/2} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/2})$$

$$\theta_{3c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_{1/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/2})$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [A_{3/2} A_{1/2} \sin(\alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) + \frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1]$$

$$\theta_{4c} = -\frac{3}{2m} [A_{3/2} A_{1/2} \cos(\alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) + \frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} A_1 A_{3/2} \sin(\alpha_1 + \alpha_{3/2})$$

$$\theta_{5c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_{3/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_{3/2})$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{4m} A_{3/2}^2 \sin 2\alpha_{3/2}$$

$$\theta_{6c} = -\frac{3}{4m} A_{3/2}^2 \cos 2\alpha_{3/2}$$

1. 5 式 (1.118) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 5$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{5/3}^2 + A_{1/3}^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \sin 2\alpha_{1/3} - A_1 A_{5/3} \sin(\alpha_{5/3} - \alpha_1) - A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) \right]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \cos 2\alpha_{1/3} + A_1 A_{5/3} \cos(\alpha_{5/3} - \alpha_1) + A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) \right]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) - A_{5/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{5/3} - \alpha_{1/3})]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) + A_{5/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{5/3} - \alpha_{1/3})]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 + A_{5/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{5/3} + \alpha_{1/3}) \right]$$

$$\theta_{3c} = -\frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 + A_{5/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{5/3} + \alpha_{1/3}) \right]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} A_1 A_{5/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{5/3})$$

$$\theta_{4c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_{5/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{5/3})$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{4m} A_{5/3}^2 \sin 2\alpha_{5/3}$$

$$\theta_{5c} = -\frac{3}{4m} A_{5/3}^2 \cos 2\alpha_{5/3}$$

I. 6 式 (1.127) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 4$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_2^2 + 2A_0^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} A_1 [2A_0 \cos \alpha_1 - A_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1)]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} A_1 [2A_0 \sin \alpha_1 + A_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 + A_2 A_0 \cos \alpha_2 \right]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 + A_2 A_0 \sin \alpha_2 \right]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} A_1 A_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\theta_{3c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{4m} A_2^2 \sin 2\alpha_2$$

$$\theta_{4c} = -\frac{3}{4m} A_2^2 \cos 2\alpha_2$$

I. 7 式 (1.135) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 6$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_0^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) + A_2 A_3 \sin (\alpha_2 - \alpha_3) + 2A_1 A_0 \cos \alpha_1]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} [A_1 A_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + A_2 A_3 \cos (\alpha_2 - \alpha_3) + 2A_1 A_0 \sin \alpha_1]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 + A_1 A_3 \sin (\alpha_1 - \alpha_3) + 2A_2 A_0 \cos \alpha_2 \right]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 + A_1 A_3 \cos (\alpha_1 - \alpha_3) + 2A_2 A_0 \sin \alpha_2 \right]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + 2A_3 A_0 \cos \alpha_3]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + 2A_3 A_0 \sin \alpha_3]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_2^2 \sin 2\alpha_2 + A_1 A_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{4c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_2^2 \cos 2\alpha_2 - A_1 A_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} A_2 A_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\theta_{5c} = -\frac{3}{2m} A_2 A_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{4m} A_3^2 \sin 2\alpha_3$$

$$\theta_{6c} = -\frac{3}{4m} A_3^2 \cos 2\alpha_3$$

I. 8 式 (1.143) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 12$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_2^2 + 2A_0^2 + A_{5/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_3^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1s} = \frac{3}{2m} [A_{5/2} A_3 \sin(\alpha_{5/2} - \alpha_3) - A_1 A_{1/2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) \\ + A_2 A_{5/2} \sin(\alpha_2 - \alpha_{5/2}) + 2A_0 A_{1/2} \cos \alpha_{1/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1c} = \frac{3}{2m} [A_{5/2} A_3 \cos(\alpha_{5/2} - \alpha_3) + A_1 A_{1/2} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) \\ + A_2 A_{5/2} \cos(\alpha_2 - \alpha_{5/2}) + 2A_0 A_{1/2} \sin \alpha_{1/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \sin 2\alpha_{1/2} + A_1 A_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ + A_2 A_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + 2A_1 A_0 \cos \alpha_1] \end{aligned}$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \cos 2\alpha_{1/2} + A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$+ A_2 A_3 \cos (\alpha_2 - \alpha_3) + 2 A_1 A_0 \sin \alpha_1]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} [-A_2 A_{1/2} \sin (\alpha_2 - \alpha_{1/2}) + A_1 A_{5/2} \sin (\alpha_1 - \alpha_{5/2}) + A_1 A_{1/2} \sin (\alpha_1 + \alpha_{1/2})]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} [A_2 A_{1/2} \cos (\alpha_2 - \alpha_{1/2}) + A_1 A_{5/2} \cos (\alpha_1 - \alpha_{5/2}) - A_1 A_{1/2} \cos (\alpha_1 + \alpha_{1/2})]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 - A_{5/2} A_{1/2} \sin (\alpha_{5/2} - \alpha_{1/2})$$

$$+ A_1 A_3 \sin (\alpha_1 - \alpha_3) + 2 A_2 A_0 \cos \alpha_2]$$

$$\theta_{4c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 + A_{5/2} A_{1/2} \cos (\alpha_{5/2} - \alpha_{1/2})$$

$$+ A_1 A_3 \cos (\alpha_1 - \alpha_3) + 2 A_2 A_0 \sin \alpha_2]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} [A_{1/2} A_3 \sin (\alpha_{1/2} - \alpha_3) + A_2 A_{1/2} \sin (\alpha_2 + \alpha_{1/2}) + 2 A_0 A_{5/2} \cos \alpha_{5/2}]$$

$$\theta_{5c} = \frac{3}{2m} [A_{1/2} A_3 \cos (\alpha_{1/2} - \alpha_3) - A_2 A_{1/2} \cos (\alpha_2 + \alpha_{1/2}) + 2 A_0 A_{5/2} \sin \alpha_{5/2}]$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + A_{5/2} A_{1/2} \sin (\alpha_{5/2} + \alpha_{1/2}) + 2 A_0 A_3 \cos \alpha_3]$$

$$\theta_{6c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) - A_{5/2} A_{1/2} \cos (\alpha_{5/2} + \alpha_{1/2}) + 2 A_0 A_3 \sin \alpha_3]$$

$$\theta_{7s} = \frac{3}{2m} [A_{1/2} A_3 \sin (\alpha_{1/2} + \alpha_3) + A_1 A_{5/2} \sin (\alpha_1 + \alpha_{5/2})]$$

$$\theta_{7c} = \frac{3}{2m} [-A_{1/2} A_3 \cos (\alpha_{1/2} + \alpha_3) - A_1 A_{5/2} \cos (\alpha_1 + \alpha_{5/2})]$$

$$\theta_{8s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_2^2 \sin 2\alpha_2 + A_1 A_3 \sin (\alpha_1 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{8c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_2^2 \cos 2\alpha_2 - A_1 A_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{9s} = \frac{3}{2m} A_2 A_{5/2} \sin (\alpha_2 + \alpha_{5/2})$$

$$\theta_{9c} = -\frac{3}{2m} A_2 A_{5/2} \cos (\alpha_2 + \alpha_{5/2})$$

$$\theta_{10s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_{5/2}^2 \sin 2\alpha_{5/2} + A_2 A_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{10c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_{5/2}^2 \cos 2\alpha_{5/2} - A_2 A_3 \cos (\alpha_2 + \alpha_3)]$$

$$\theta_{11s} = \frac{3}{2m} A_{5/2} A_3 \sin(\alpha_{5/2} + \alpha_3)$$

$$\theta_{11c} = -\frac{3}{2m} A_{5/2} A_3 \cos(\alpha_{5/2} + \alpha_3)$$

$$\theta_{12s} = \frac{3}{4m} A_3^2 \sin 2\alpha_3$$

$$\theta_{12c} = -\frac{3}{4m} A_3^2 \cos 2\alpha_3$$

1. 9 式 (1.152) の係数 θ_0 , θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 9$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{7/3}^2 + A_{1/3}^2 + A_3^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \varepsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \sin 2\alpha_{1/3} - A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) + A_{7/3} A_3 \sin(\alpha_{7/3} - \alpha_3) \right]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_{1/3}^2 \cos 2\alpha_{1/3} + A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/3}) + A_{7/3} A_3 \cos(\alpha_{7/3} - \alpha_3) \right]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_{1/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) + A_1 A_{7/3} \sin(\alpha_1 - \alpha_{7/3})]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_{1/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/3}) + A_1 A_{7/3} \cos(\alpha_1 - \alpha_{7/3})]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} [A_{7/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{7/3} - \alpha_{1/3}) + A_1 A_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) + \frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} [-A_{7/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{7/3} - \alpha_{1/3}) + A_1 A_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3) - \frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [A_{7/3} A_{1/3} \sin(\alpha_{7/3} + \alpha_{1/3}) + A_{1/3} A_3 \sin(\alpha_{1/3} - \alpha_3)]$$

$$\theta_{4c} = \frac{3}{2m} [-A_{7/3} A_{1/3} \cos(\alpha_{7/3} + \alpha_{1/3}) + A_{1/3} A_3 \cos(\alpha_{1/3} - \alpha_3)]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} [A_{1/3} A_3 \sin(\alpha_{1/3} + \alpha_3) + A_1 A_{7/3} \sin(\alpha_1 + \alpha_{7/3})]$$

$$\theta_{5c} = \frac{3}{2m} [-A_{1/3} A_3 \cos(\alpha_{1/3} + \alpha_3) - A_1 A_{7/3} \cos(\alpha_1 + \alpha_{7/3})]$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{2m} A_1 A_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3)$$

$$\theta_{6c} = -\frac{3}{2m} A_1 A_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)$$

$$\theta_{7s} = \frac{3}{4m} A_{7/3}^2 \sin 2\alpha_{7/3}$$

$$\theta_{7c} = -\frac{3}{4m} A_{7/3}^2 \cos 2\alpha_{7/3}$$

$$\theta_{8s} = \frac{3}{2m} A_{7/3} A_3 \sin(\alpha_{7/3} + \alpha_3)$$

$$\theta_{8c} = -\frac{3}{2m} A_{7/3} A_3 \cos(\alpha_{7/3} + \alpha_3)$$

$$\theta_{9s} = \frac{3}{4m} A_3^2 \sin 2\alpha_3$$

$$\theta_{9c} = -\frac{3}{4m} A_3^2 \cos 2\alpha_3$$

I. 10 式 (1.160) の係数 θ_0 , θ_n , および ε_n ($n=1 \sim 5$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_3^2 + A_5^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \varepsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\theta_{1s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 + A_3 A_5 \sin(\alpha_3 - \alpha_5) + A_1 A_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \right]$$

$$\theta_{1c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 + A_3 A_5 \cos(\alpha_3 - \alpha_5) + A_1 A_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \right]$$

$$\theta_{2s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3) + A_1 A_5 \sin(\alpha_1 - \alpha_5)]$$

$$\theta_{2c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3) + A_1 A_5 \cos(\alpha_1 - \alpha_5)]$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} \left[\frac{1}{2} A_3^2 \sin 2\alpha_3 + A_1 A_5 \sin(\alpha_1 + \alpha_5) \right]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} \left[-\frac{1}{2} A_3^2 \cos 2\alpha_3 - A_1 A_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_5) \right]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} A_3 A_5 \sin(\alpha_3 + \alpha_5)$$

$$\theta_{4c} = -\frac{3}{2m} A_3 A_5 \cos(\alpha_3 + \alpha_5)$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{4m} A_s^2 \sin 2\alpha_s$$

$$\theta_{5c} = -\frac{3}{4m} A_s^2 \cos 2\alpha_s$$

I. 11 式 (3.50) の係数 θ_0 , θ_n , および ϵ_n ($n=1 \sim 8$)

$$\theta_0 = -\left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{3}{2m} (A_1^2 + A_{3/2}^2 + A_{1/2}^2 + A_2^2 + 2A_0^2)$$

$$\theta_n^2 = \theta_{ns}^2 + \theta_{nc}^2, \quad \epsilon_n = \tan^{-1} \frac{\theta_{ns}}{\theta_{nc}}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1s} = \frac{3}{2m} [& A_1 A_{3/2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{3/2}) - A_1 A_{1/2} \sin(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) \\ & + A_{3/2} A_2 \sin(\alpha_{3/2} - \alpha_2) + 2 A_{1/2} A_0 \cos \alpha_{1/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1c} = \frac{3}{2m} [& A_1 A_{3/2} \cos(\alpha_1 - \alpha_{3/2}) + A_1 A_{1/2} \cos(\alpha_1 - \alpha_{1/2}) \\ & + A_{3/2} A_2 \cos(\alpha_{3/2} - \alpha_2) + 2 A_{1/2} A_0 \sin \alpha_{1/2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2s} = \frac{3}{2m} [& \frac{1}{2} A_{1/2}^2 \sin 2\alpha_{1/2} - A_{3/2} A_{1/2} \sin(\alpha_{3/2} - \alpha_{1/2}) \\ & + A_1 A_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + 2 A_1 A_0 \cos \alpha_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2c} = \frac{3}{2m} [& -\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \cos 2\alpha_{1/2} + A_{3/2} A_{1/2} \cos(\alpha_{3/2} - \alpha_{1/2}) \\ & + A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + 2 A_1 A_0 \sin \alpha_1] \end{aligned}$$

$$\theta_{3s} = \frac{3}{2m} [A_{1/2} A_2 \sin(\alpha_{1/2} - \alpha_2) + A_1 A_{1/2} \sin(\alpha_1 + \alpha_{1/2}) + 2 A_{3/2} A_0 \cos \alpha_{3/2}]$$

$$\theta_{3c} = \frac{3}{2m} [A_{1/2} A_2 \cos(\alpha_{1/2} - \alpha_2) - A_1 A_{1/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_{1/2}) + 2 A_{3/2} A_0 \sin \alpha_{3/2}]$$

$$\theta_{4s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_1^2 \sin 2\alpha_1 + A_{3/2} A_{1/2} \sin(\alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) + 2 A_2 A_0 \cos \alpha_2]$$

$$\theta_{4c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_1^2 \cos 2\alpha_1 - A_{3/2} A_{1/2} \cos(\alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}) + 2 A_2 A_0 \sin \alpha_2]$$

$$\theta_{5s} = \frac{3}{2m} [A_1 A_{3/2} \sin(\alpha_1 + \alpha_{3/2}) + A_{1/2} A_2 \sin(\alpha_{1/2} + \alpha_2)]$$

$$\theta_{5c} = \frac{3}{2m} [-A_1 A_{3/2} \cos(\alpha_1 + \alpha_{3/2}) - A_{1/2} A_2 \cos(\alpha_{1/2} + \alpha_2)]$$

$$\theta_{6s} = \frac{3}{2m} [\frac{1}{2} A_{3/2}^2 \sin 2\alpha_{3/2} + A_1 A_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

$$\theta_{6c} = \frac{3}{2m} [-\frac{1}{2} A_{3/2}^2 \cos 2\alpha_{3/2} - A_1 A_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

$$\theta_{7s} = \frac{3}{2m} A_{3/2} A_2 \sin(\alpha_{3/2} + \alpha_2)$$

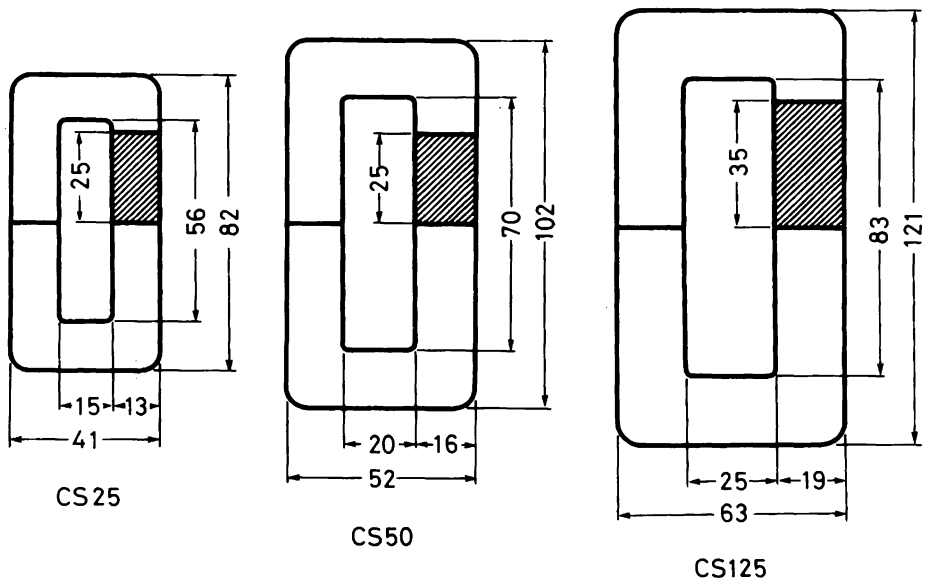
$$\theta_{7c} = -\frac{3}{2m} A_{3/2} A_2 \cos(\alpha_{3/2} + \alpha_2)$$

$$\theta_{8s} = \frac{3}{4m} A_2^2 \sin 2\alpha_2$$

$$\theta_{8c} = -\frac{3}{4m} A_2^2 \cos 2\alpha_2$$

付録Ⅱ 実験に用いたリアクトル

実験に用いたリアクトルの特性は、実験結果と解析結果を比較するために、3次特性に近づけた。このような特性のリアクトルは実際には単一のリアクトルでは得られないので、鉄心に空隙を設けたリアクトルと空隙を有しないリアクトルを直列に接続して3次特性のリアクトルを合成した。^[1] 実験で使用した鉄心の形式を図Ⅱ.1に示す。直列共振回路に用いたリアクトルの各鉄心、空隙長、およびコイルの巻数を図Ⅱ.2に示す。また、変圧器結合回路に使用したリアクトルの詳細については図Ⅱ.3に示す。



図Ⅱ.1 実験において使用した鉄心（標準型カットコア，富士通）。

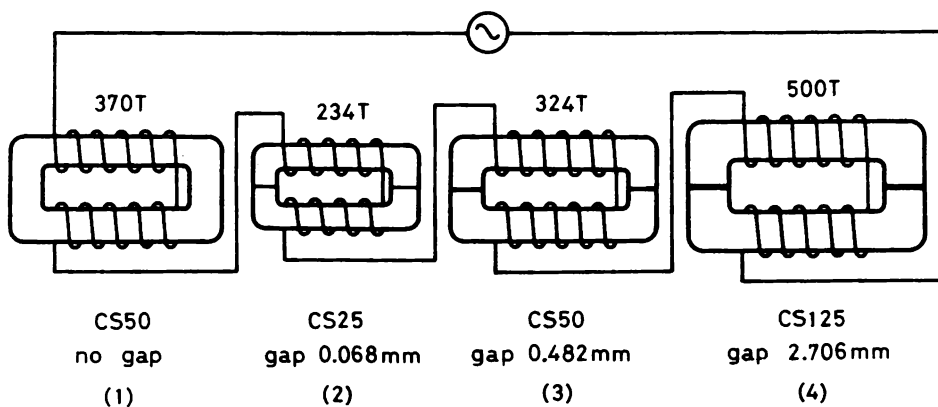


図 Ⅰ. 2 直列共振回路において使用したリアクトル。

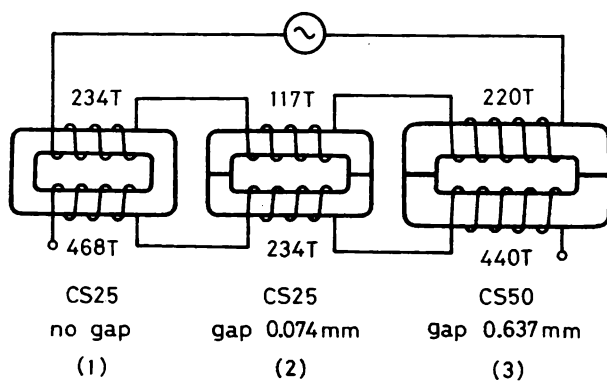


図 Ⅰ. 3 変圧器結合回路において使用したリアクトル。

付録Ⅲ SCR を用いた開閉器

実験回路において電源電圧の任意の位相において振動を開始させるために逆並列に接続した SCR^* を用いた。

図Ⅲ.1は SCR を用いた開閉器の回路図である。 SCR_1 および SCR_2 は交流が導通できるように逆並列に接続された SCR であり、これらはユニジャンクショントランジスタ UJT^{**} を含むパルス発生回路および移相回路と結合した補助の SCR (SCR_3 および SCR_4) によって制御される。なお、この開閉器は実験回路における静電容量の充電回路を主回路から切り離すリレーを付属している。

開閉器の各部の電圧および電流等の時間変化を図Ⅲ.2に示す。制御の順序はつぎの通りである。まず手動スイッチ SW は開いており、リレー MC_1 の接点 a および b は接触していない。したがって UJT は非導通状態である。またリレー MC_2 は励磁されていないので、その接点 c および d は接触していない。したがって抵抗 R_1 および R_2 には電流は流れず、電圧降下はない。 SCR_1, SCR_2 は阻止状態にある。つぎに手動スイッチ SW を閉じると、リレー MC_1 が励磁され、接点 a および b は図Ⅲ.2 d に示す瞬間に閉じるものとする。そのとき、抵抗 R_3 を通して容量 C_1 および C_2 が充電され、 UJT のエミッタ電圧が上昇する。一方移相器 PS によって移相した電圧を昇圧し、ツェナーダイオード ZD によって図Ⅲ.2 b に示すような矩形波電圧をつくる。これを CR 微分回路に通してパルスを発生する。(図Ⅲ.2 c) これらの内、負パルス

* SCR はゲート陰極間に点弧に十分な電流を流したとき、正の陽極電圧のもとで点弧する。導通後、陽極電流はゲート電流によって阻止されたり、制御されたりすることはない。阻止状態は陽極電流を保持電流 (通常 $3 \sim 10 \text{ mA}$) 以下にすることにより回復する。導通状態での順方向電圧降下は陽極電流および SCR 接合部の温度に少々関係するが、概ね 1 [V] 以下である。^[34]

** UJT はスイッチング用トランジスタであり、エミッタ (E) が尖頭点電圧 V_P より小さければ、エミッタは逆方向にバイアスされ、逆方向漏れ電流が流れる。エミッタ電圧 V_E が V_P に等しくなると、 UJT は $1 \sim 2 \text{ } [\mu\text{S}]$ でターンオンする。この状態ではエミッタとベース 1 (B_1) の間の抵抗は極めて低く、エミッタ電流は、エミッタとベース 1 の間の直列抵抗でのみ制限される。 UJT の尖頭点電圧 V_P は次式で与えられる。

$$V_P = \eta V_{BB} + V_D$$

ここに V_{BB} はベース 1 とベース 2 (B_2) の間の電圧であり、 η は UJT の形による定数で 0.5 と 0.75 の間にある。 V_D は約 0.7 [V] である。エミッタ電圧が約 2 [V] になると、エミッタは導通をやめ、 UJT はターンオフする。^[34]

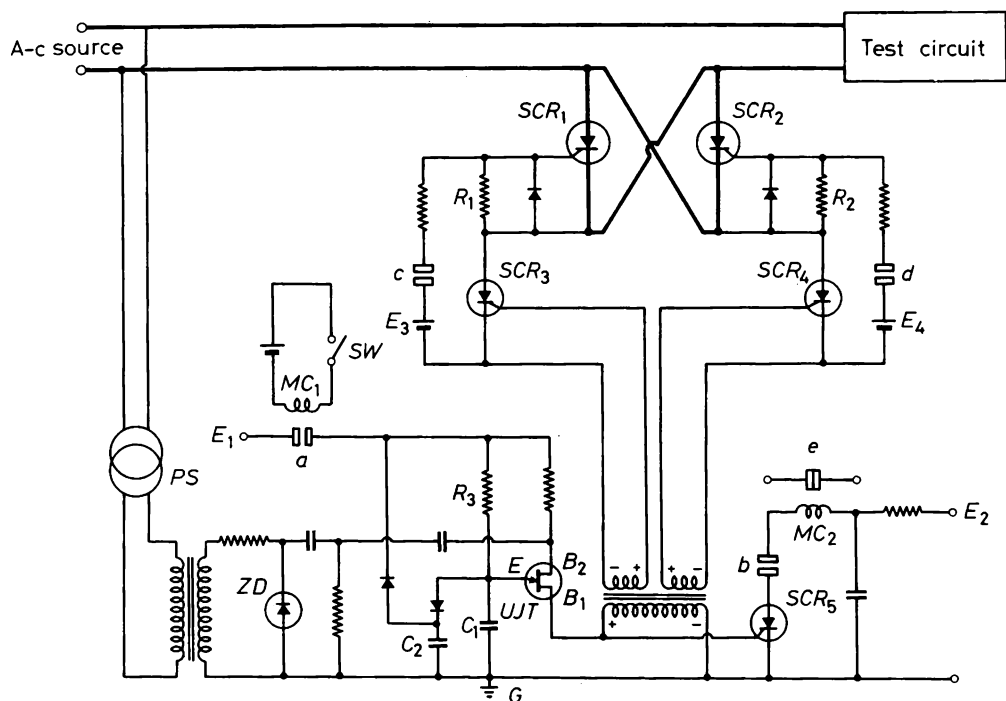


図 Ⅲ.1 SCR を用いた開閉器の回路図。 SCR_1, SCR_2 : 主 SCR。 SCR_3, SCR_4 : 制御用 SCR。 UJT : ユニジャンクショントランジスタ。 ZD : ツェナーダイオード。
 PS : 移相器。 MC_1, MC_2 : 電磁開閉器。

が UJT のベース 2 (B_2) に印加した瞬間に UJT は動作し、容量 C_1 の電荷は放電する。(図 Ⅲ.2d) 図 Ⅲ.2e に示すようにベース 1 と接地 G の間に正パルスが発生し、これが SCR_5 のゲート陰極間に印加され SCR_5 は導通状態になる。リレー MC_2 は励磁されてその接点 c および d は接触し、主回路の容量を充電するための接点 e は開く。

容量 C_1 の電荷が放電したのち、 UJT はオフの状態になり、抵抗 R_3 を通じて容量 C_1 は再び充電される。 SCR_3 および SCR_4 は、 UJT の発生する 2 番目の正パルスがそれぞれのゲート陰極間に加えられる瞬間に導通し、抵抗 R_1 および R_2 に発生する電圧が SCR_1 および SCR_2 のゲート陰極間に印加される。その結果、これらの SCR は導通状態になる。主電流の波形の一例を図 Ⅲ.2g に示す。

手動スイッチを閉じる時刻にかかわらず、 UJT の発生するパルスが SCR_3 および SCR_4 のゲート陰極間に印加される瞬間の位相角で振動が開始する。この位相角はあらかじめ設定した位相角であり、 UJT のベース 2 を制御する移相器の設定によって任意に選べる。

スイッチ SW が開かれたとき、リレー MC_1 の接点 a および b は開く、引続きリレー MC_2 が励磁されなくなり、その接点 c および d も開く。(図 Ⅲ.2f) 同時に SCR_1 および SCR_2

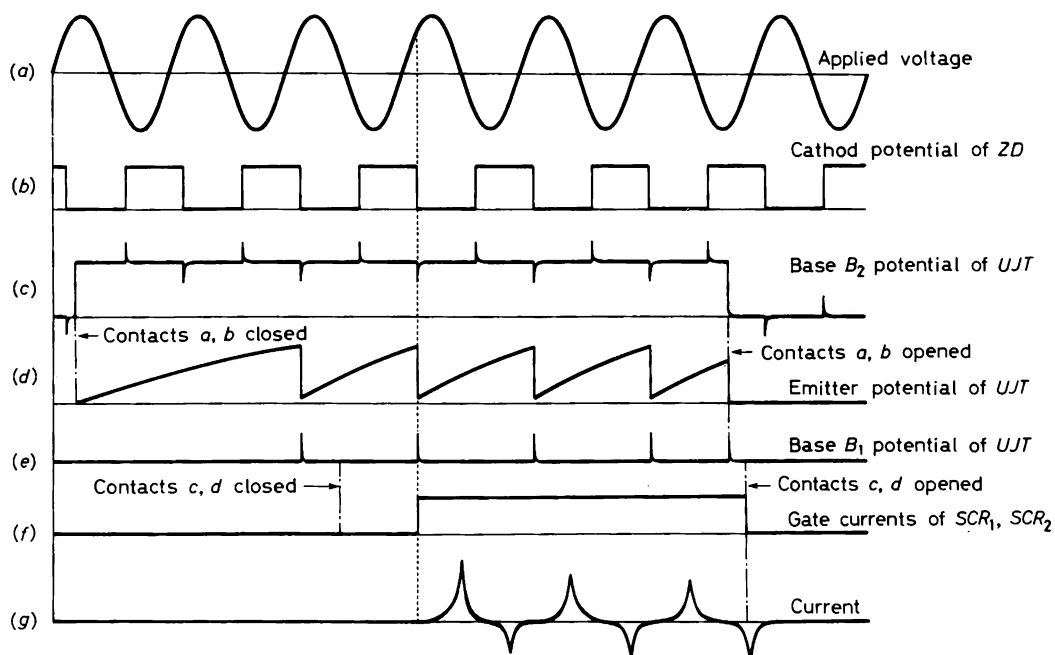


図 11.2 SCR を用いた開閉器の動作を説明する各部電圧および電流の波形。

のゲート電流は零となる。 SCR_1 および SCR_2 の陽極陰極間電流が保持電流 (5mA) 以下になれば、それ以後非導通状態になる。(図 11.2g)

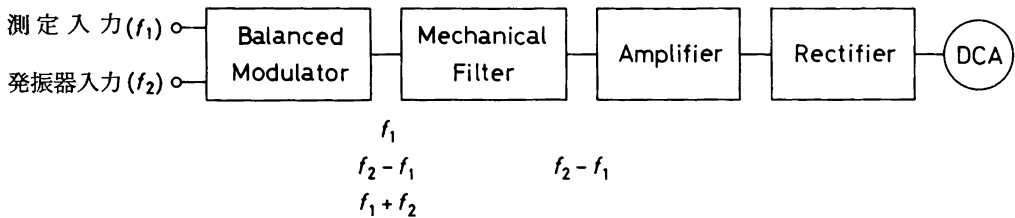
開閉器の時間精度は、 UJT および SCR の導通時の立上り時間と移相器の指示の誤差によって決まる。前者は $3[\mu S]$ 程度であり、位相角で 0.1 度以下である。(交流電圧の 1 サイクルが 360 度に対応する) 後者は 0.3 度以下に保たれる。結局、位相角の全体の誤差は 0.4 度以下にすることができる。

付録Ⅳ ヘテロダイン波形分析器

本波形分析器は機械的共振子を用いた Heterodyne Harmonic Analyzer であって、周波数測定範囲は 0 ～ 550 [Hz] である。

Ⅳ.1 原 理

試作した波形分析器のブロック図を図Ⅳ.1 に示す。



図Ⅳ.1 波形分析器のブロック図.

図Ⅳ.2a に示す平衡型変調器 Balanced Modulator の端子 1, 2 の測定入力電圧を $E_1 \sin 2\pi f_1 t$ とし、発振器入力電圧を $E_2 \sin 2\pi f_2 t$ とする。また平衡型変調器の真空管特性が次式で与えられるものとする。

$$i_p = a_0 + a_1 e_g + a_2 e_g^2 \quad (\text{Ⅳ.1})$$

ここに i_p はプレート電流であり、 e_g はグリッド電圧である。また a_0 、 a_1 、および a_2 は真空管の特性による定数である。平衡型変調器の出力は

$$2a_1 E_1 \sin 2\pi f_1 t + 2a_2 E_1 E_2 [\cos 2\pi (f_2 - f_1) t - \cos 2\pi (f_1 + f_2) t] \quad (\text{Ⅳ.2})$$

となり、周波数 f_1 、 $f_2 - f_1$ 、および $f_1 + f_2$ の成分を持つ。これを共振周波数が $f_2 - f_1$ ($= 550 \text{ Hz}$) の機械的共振子を持つ沓波器に通して、周波数 $f_2 - f_1$ の成分のみを取り出す。沓波電圧の大きさは測定入力電圧の大きさ E_1 および発振器入力電圧の大きさ E_2 に比例し、その周波数は $f_2 - f_1$ である。したがって発振器入力電圧の大きさを一定にし、その周波数 f_2 を変化することにより、測定入力電圧の大きさ E_1 および周波数 f_1 を知ることができる。沓波器の出力電圧を増幅し、これを整流して直流電流計 (DCA) で測定する。

IV.2 回路および特性

波形分析器の各部の回路を図 IV.2 および図 IV.3 に示す。平衡型変調器，汜波回路，増幅回

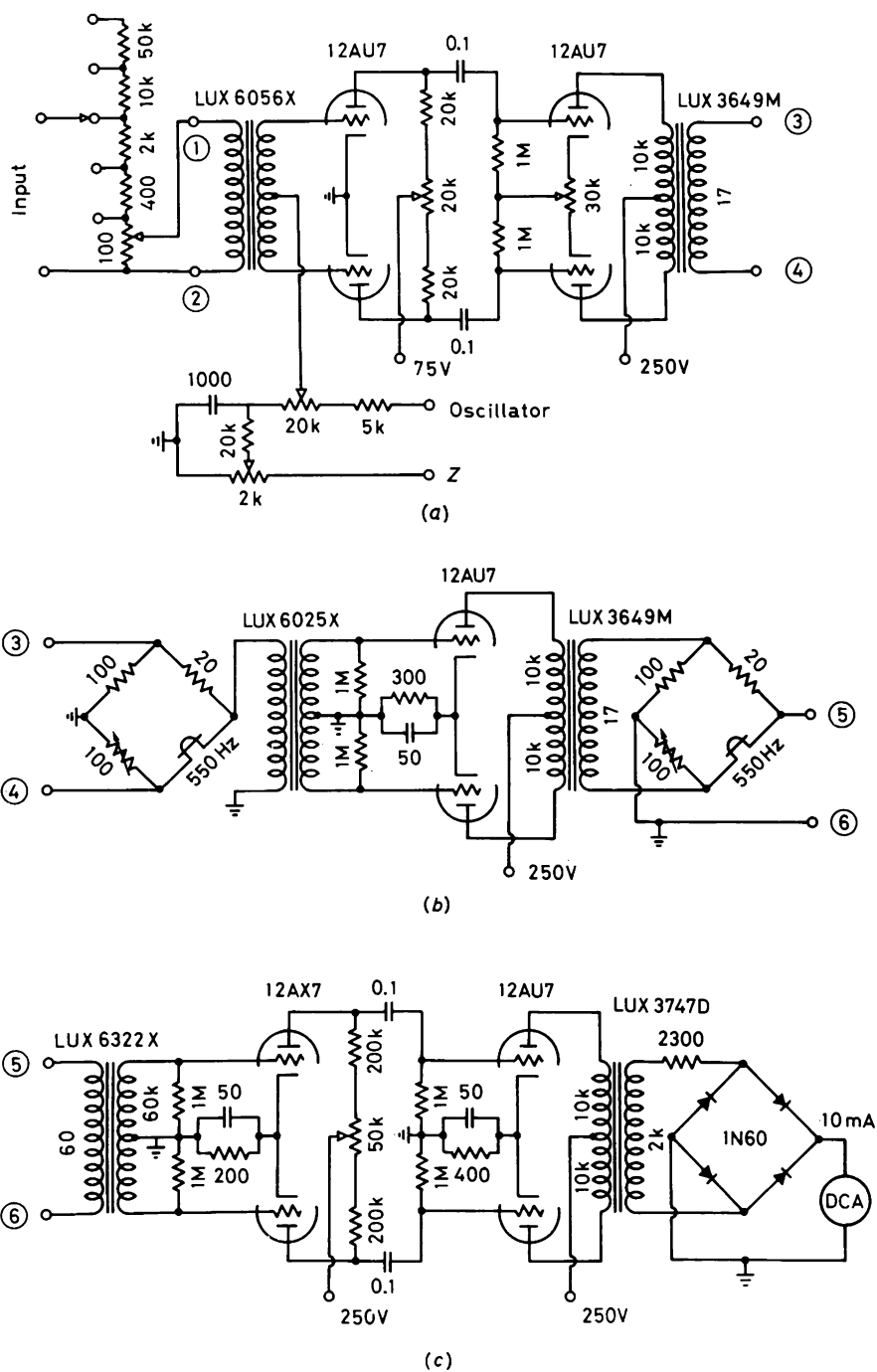


図 IV.2 ヘテロダイン式波形分析器。

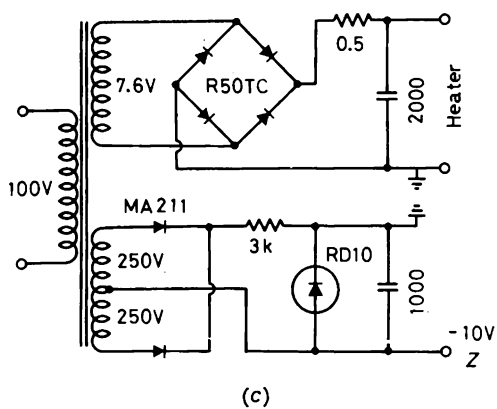
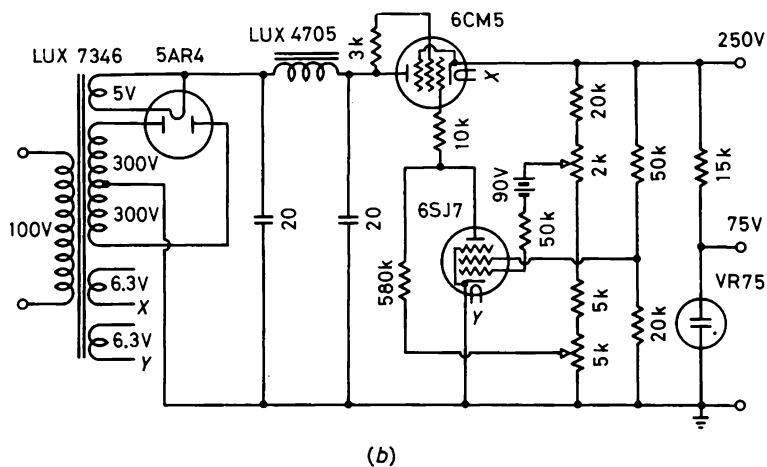
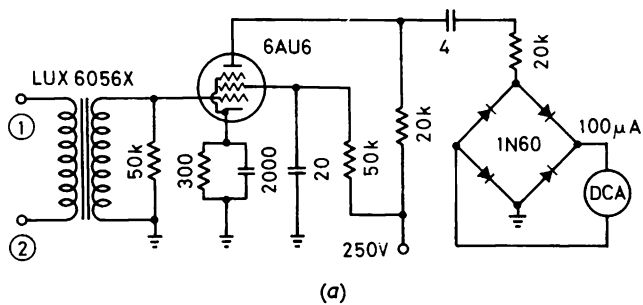
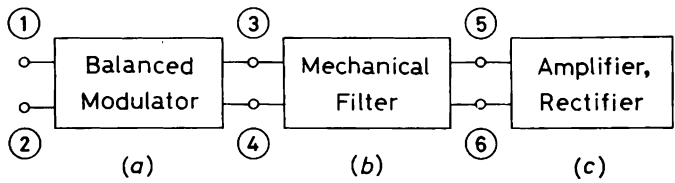


図 IV. 3 測定入力電圧の大きさを測定するための回路および波形分析器の電源回路。

路および整流回路の接続を図Ⅳ.4に示す。図Ⅳ.2*a*には入力部および平衡型変調器回路を示す。



図Ⅳ.4 各回路の接続。

平衡型変調器は2乗特性の範囲内で使用しなければならないので、測定入力電圧の大きさを測定するための回路を別に設けた。(図Ⅳ.3*a*) 図Ⅳ.2*b*には汙波回路を示す。分解能をよくするため2つの汉波回路を直列に接続した。その結果、共振周波数 f_0 から12 [Hz] ずれた周波数を持つ入力電圧 $E \sin 2\pi (f_0 \pm 12) t$ を端子3,4に印加したときの出力電圧は、共振周波数を持つ入力電圧 $E \sin 2\pi f_0 t$ を端子3,4に印加した場合の4%となった。図Ⅳ.2*c*に示すように増幅回路はプッシュプル方式の2段増幅回路である。図Ⅳ.3*b*および図Ⅳ.3*c*には電源回路を示す。以上の回路構成により本波形分析器の振幅特性および周波数特性は極めて良好な直線性を持つ。

付録 V 周期係数線形微分方程式を定数係数線形微分 方程式に変換する方法^[32]

次の 3 元連立 1 階の周期係数線形微分方程式について考察する。

$$\frac{dx_s}{dt} = P_{s1}(t)x_1 + P_{s2}(t)x_2 + P_{s3}(t)x_3, \quad (s=1,2,3) \quad (\text{V. 1})$$

ここに係数 $P_{si}(t)$, ($i, s=1,2,3$) は周期 L の周期関数であるとする。式 (V. 1) の互に独立な基本解

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(i)}(t) &= e^{\mu_i t} \varphi_1^{(i)}(t) \\ x_2^{(i)}(t) &= e^{\mu_i t} \varphi_2^{(i)}(t) \\ x_3^{(i)}(t) &= e^{\mu_i t} \varphi_3^{(i)}(t), \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{V. 2})$$

に現われる周期関数 $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}$, および $\varphi_3^{(i)}$ を用いて

$$x_s = \varphi_s^{(1)} y_1 + \varphi_s^{(2)} y_2 + \varphi_s^{(3)} y_3, \quad (s=1,2,3) \quad (\text{V. 3})$$

なる変換を行なう。式 (V. 1) を考慮して式 (V. 3) の両辺を t に関して微分すれば次式を得る。

$$\sum_{\alpha=1}^3 \dot{\varphi}_s^{(\alpha)} y_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \varphi_s^{(\alpha)} \dot{y}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{s\beta} \varphi_\beta^{(\alpha)} y_\alpha, \quad (\cdot \equiv d/dt) \quad (\text{V. 4})$$

式 (V. 2) は式 (V. 1) の解であるから次の関係が成立する。

$$\mu_i \varphi_s^{(i)} + \dot{\varphi}_s^{(i)} = \sum_{\beta=1}^3 P_{s\beta} \varphi_\beta^{(i)} \quad (\text{V. 5})$$

式 (V. 5) を式 (V. 4) に代入して次式を得る。

$$\sum_{\alpha=1}^3 \varphi_s^{(\alpha)} \dot{y}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{s\beta} \varphi_\beta^{(\alpha)} y_\alpha - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{s\beta} \varphi_\beta^{(\alpha)} y_\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \varphi_s^{(\alpha)} \mu_\alpha y_\alpha \quad (\text{V. 6})$$

式 (V. 6) の両辺の $\varphi_s^{(\alpha)}$, ($\alpha=1,2,3$) の係数を等置して

$$\frac{d y_{\alpha}}{d t}=\mu_{\alpha} y_{\alpha}, \quad(\alpha=1,2,3) \quad(\text { V. } 7)$$

を得る。上式は変数 y_{α} に関して定数係数線形常微分方程式であり, この系の特性根は式 (V. 1) の特性指数であることが判る。

参 考 文 献

1. C. Hayashi: Forced Oscillations in Nonlinear Systems, Nippon Printing and Publishing Co., Ltd., Osaka, Japan, 1953.
2. C. Hayashi: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
3. 林 千博：可飽和鉄心を有する非線形回路における分数調波振動の一実験，電気学会連合大会，昭和 18 年 4 月．
4. 林 千博，上田脛亮，大嶋健司，川上 博：2つの可飽和鉄心を有する非線形回路，電子通信学会非直線理論研究会資料，1965 年 12 月．
5. 林 千博，大嶋健司：可飽和鉄心を有する非線形回路に発生する周期振動と概周期振動，電気 4 学会連合大会，昭和 42 年 4 月．
6. 林 千博，大嶋健司，永井正志：1 階と 2 階の連立非線形微分方程式の系に発生する振動，電気学会連合大会，昭和 43 年 3 月．
7. 林 千博，大嶋健司，一戸光一：可飽和鉄心を含む回路に発生する周期振動と概周期振動，電子通信学会非直線理論研究会資料，1968 年 12 月．
8. 林 千博，一戸光一，大嶋健司：直列共振回路に発生する強制振動，電気学会連合大会，昭和 44 年 3 月．
9. W. J. Cunningham: Introduction to Nonlinear Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
10. 林 千博，大嶋健司：可飽和鉄心を含む直列共振回路に発生する強制振動，電子通信学会非線形問題研究会資料，1970 年 7 月．
11. C. Hayashi: Studies on Low Frequency Oscillations in Transformer Circuits, *Elec. Rev.*, 29: 599-608, 670-677, 732-740 (1941).
12. C. Hayashi: Stability Investigation of the Nonlinear Periodic Oscillations, *J. Appl. Phys.*, 24: 344-348 (1953).
13. G. W. Hill: On the Part of the Motion of the Lunar Perigee, *Acta Math.*, 8: 1-36 (1886).

14. ポントリャーギン： 常微分方程式； 第3章， 共立出版， 昭和38年。
15. C. Hayashi, Y. Nishikawa, and M. Abe: Subharmonic Oscillations of Order One half, *Trans. IRE Circuit Theory*, CT-7: 102-111 (1960).
16. Y. Nishikawa: A Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations, Nippon Printing and Publishing Co., Ltd., Osaka, Japan, 1964.
17. C. Hayashi: Subharmonic Oscillations in Nonlinear Systems, *J. Appl. Phys.*, 24: 521-529 (1953).
18. J. D. McCrurn: An Experimental Investigation of Subharmonic Currents, *Trans. AIEE*, 60: 533-540 (1941).
19. Y. Ueda: Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations, Nippon Printing and Publishing Co., Ltd., Osaka, Japan, 1968.
20. 林 千博， 大嶋健司： 直列共振回路に発生する第 $\frac{7}{3}$ 次分数調波振動， 電子通信学会非線形問題研究会資料， 1972年7月。
21. R. Rüdenberg: Nonharmonic Oscillations as Caused by Magnetic Saturation, *Trans. AIEE*, 68: 678-684 (1949).
22. 林 千博， 大嶋健司： 可飽和鉄心を含む直列共振回路に発生する振動， 電気学会関西支部連合大会， 昭和44年10月。
23. 林 千博， 大嶋健司： 直列共振回路に発生する第 $\frac{3}{2}$ 次分数調波振動， 電子通信学会非線形問題研究会資料， 1973年7月。
24. 林 千博， 大嶋健司： 直列共振回路に発生する第2高調波振動および第 $\frac{5}{2}$ 次分数調波振動， 電気学会全国大会， 昭和47年3月。
25. 林 千博， 上田皖亮， 大嶋健司， 川上 博： 非線形回路における $\frac{1}{2}$ 調波振動， 電気学会連合大会， 昭和41年4月。
26. W. T. Thomson: Resonant Nonlinear Control Circuits, *Trans. AIEE*, 57: 469, (1938).
27. 林 千博： 直流を重畳せる場合における鉄共振現象， 三菱電機， vol. 8: 317, (1942).
28. 南雲仁一： 3階の疑調波振動について， 電子通信学会非直線理論研究会資料， 1957年12月。
29. 林 千博， 西川禎一： 非線形回路における概周期振動， 電子通信学会非直線理論研究会資料， 1959年1月。

30. C. Hayashi: Quasi-periodic Oscillations in Nonlinear Control Systems, *Autom. Remote Control (First Intern. Congr. IFAC)*, vol. 2, 889-894, Butterworth Scientific Publications, London, 1961.
31. 林 千博, 大嶋健司: 可飽和鉄心を有する回路に生ずる概周期振動について, 電気4学会連合大会, 昭和45年3月.
32. I. G. Malkin: Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations, Chap. 2-4, Gostekhizdat, Moscow, 1956. English translation, OTS Atomic Energy Commission, Washington, D. C.
33. 福原満洲雄, 稲葉三男: 微分方程式通論; 第4章, 共立出版, 昭和34年.
34. F. W. Gutzwiller, D. V. Jones, H. R. Lowry, and T. P. Sylvan: Controlled Rectifier Manual, General Electric Company, Liverpool, New York, 1960.

